Н. И. Шкиль, З. И. Слепкань, Е. С. Дубинчук

АЛГЕБРА и начала анализа

УЧЕБНИК
ДЛЯ
10
КЛАССА
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Утверждено
Министерством образования и науки Украины

КИЕВ
«ЗОДИАК-ЭКО»
2003

ББК 22.14я721
Ш66

Утверждено Министерством образования и науки Украины
(письмо от 10 августа 2001 г. № 1/11-3496)

Переведено с издания:
М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — К.: Зодіак-ЕКО, 2002.
Переводчики: Е. Е. Волянская, Е. Т. Шкиль

Рецензенты:
В. П. Яковец — заведующий кафедрой математики Нежинского педагогического института им. Н. В. Гоголя, доктор физико-математических наук;
Н. П. Никитенко — учитель-методист средней школы № 170 г. Киева

Шкіль М. І. та ін.
Ш66 Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М. І. Шкіль, З. І. Слепкань, О. С. Дубинчук; Пер. з укр. — К.: Зодіак-ЕКО, 2003. — 272 с. — Рос. мовою.

ISBN 966-7090-26-4 (рос.).
ISBN 966-7090-21-3 (укр.).

ББК 22.14я721

ISBN 966-7090-26-4 (рос.).
ISBN 966-7090-21-3 (укр.).

ОТ АВТОРОВ

Алгебра и начала анализа — учебный предмет, в котором объединен учебный материал нескольких областей математической науки.

Авторы предлагаемого учебника ставили цель — обеспечить дифференцированное изучение алгебры и начал анализа. В нем представлен учебный материал для трех уровней обучения: средний уровень (уровень образовательного стандарта по математике), который оценивается 4—6 баллами, достаточный — оценивается 7—9 баллами и высокий — оценивается 10—12 баллами. Углубленный уровень предусмотрен для тех учащихся, которые имеют возможность и желание усвоить алгебру и начала анализа в более широком и глубоком объеме. Первые два уровня составляют базовый уровень обучения.

В соответствии с поставленной целью в учебнике дифференцируется как теоретический материал, так и система упражнений. Кроме теоретического материала, предусмотренного действующей программой, в учебник включены некоторые вопросы теории, которые выходят за рамки программы и рассчитаны на учащихся, которые желают изучать предмет на углубленном уровне (числовые последовательности, предел числовой последовательности, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, основные теоремы о пределах числовых последовательностей и их доказательства; бесконечно малые функции и доказательство основных теорем о пределах функций, комплексные числа).

Система упражнений учебника представлена на трех уровнях. Буквой А обозначены упражнения обязательного уровня, буквой $\boxed{\text{Б}}$— повышенного уровня, буквой $\boxed{\textbf{В}}$— углубленного уровня. Для большинства упражнений в учебнике даны ответы.

С целью закрепления, контроля и самоконтроля изученного учебного материала после каждого параграфа учебника предлагается система вопросов и заданий. На каждый вопрос можно найти прямой ответ в тексте соответствующего параграфа.

Изучение алгебры и начал анализа широко опирается на знания, навыки и умения учащихся, полученные ими во время изучения математики в 5—6-х классах и курса алгебры основной школы. Поэтому возникают естественная потребность и возможность в текущем и итоговом повторении полученных ранее знаний и умений.

Авторы надеются, что предлагаемый учебник будет способствовать усвоению алгебры и начал анализа и желают учащимся успехов в этом важном деле.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

N — множество всех натуральных чисел

Z — множество всех целых чисел

Q — множество всех рациональных чисел

R — множество всех действительных чисел, числовая прямая

$[a; b]$ — отрезок (закрытый промежуток) с концами a и b

$(a; b)$ — интервал (открытый промежуток)

$(a; b]$, $[a; b)$ — полуинтервал и полуотрезок (полуоткрытый промежуток) с концами a и b, $a < b$

$(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b)$, $(-\infty; b]$ — бесконечные промежутки

$(-\infty; +\infty)$ — множество всех действительных чисел, числовая прямая

$\langle a; b \rangle$ — произвольный промежуток с концами a и b, $a < b$

$\in$ — знак принадлежности элемента множеству

$[x]$ — целая часть числа x

$\{x\}$ — дробная часть числа x

$|x|$ — модуль числа x

$\sqrt{x}$ — арифметический квадратный корень из числа x

$f(x)$ — значение функции f в точке x

$D(f)$ — область определения функции f

$E(f)$ — область значений функции f

$\sin x$ — функция синус

$\cos x$ — функция косинус

$\operatorname{tg} x$ — функция тангенс

$\operatorname{ctg} x$ — функция котангенс

$\arcsin x$ — функция арксинус

$\arccos x$ — функция арккосинус

$\operatorname{arctg} x$ — функция арктангенс

$\operatorname{arcctg} x$ — функция арккотангенс

1 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функции нужны не только натуралисту, без них теперь не обойдется и социология. Вообще, ныне нет ни одной области человеческого познания, куда не входили бы понятия о функциях и их графическом изображении.

К. Ф. Лебединцев

§ 1. Повторение и расширение сведений о функции

1. Определение функции. Возрастающие, убывающие, четные и нечетные функции. Материальное единство мира проявляется во взаимосвязи и взаимообусловленности различных явлений и процессов, которые происходят в природе. Рассматривая их, приходится учитывать зависимости одних переменных от других. Например, зависимость пути от времени, зависимость количества купленного товара на определенную сумму от цены, зависимость между площадью круга и его радиусом. Необходимость изучения на практике зависимостей между переменными разной природы привела к понятию **функции** в математике.

Зависимость переменной y от переменной x называется функцией, если каждому значению x соответствует единственное значение y.

Функцию обозначают или одной буквой латинского алфавита f, F, или с помощью равенства $y = f(x)$, которое символически означает зависимость между двумя переменными.

Переменную x называют **независимой**, или **аргументом**, а переменную y — **зависимой**.

Значением функции называется значение зависимой переменной y, которое она принимает при определенном значении x.

Множество значений, которые принимает независимая переменная x, называется **областью определения функции**.

Множество соответствующих значений зависимой переменной y, которые она принимает при всех значениях x из области определения функции, называется **областью значений**, или **областью изменения функции**.

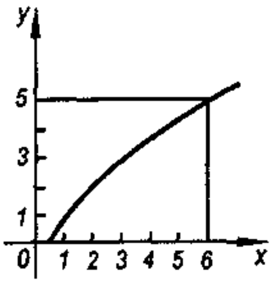

Рис. 1

Пример 1. Зависимость пути s тела, движущегося равномерно, от времени t является функцией, которая задается формулой $s = s_0 + vt$, где s_0 — начальный путь; v — скорость, которая является постоянной при равномерном движении.

Пример 2. Если учащиеся группы, состоящей из 25 человек, дежурят на протяжении апреля, кроме тех дней, которые приходятся на воскресенье, то каждому из дней апреля соответствует определенный дежурный. Независимой переменной здесь являются дни апреля, зависимой — дежурный. Имеем функцию, областью определения которой является множество дней апреля (без воскресений), а областью изменения — множество учеников группы.

Пример 3. Активная электрическая энергия, которая затрачивается в цепи переменного тока за время t, является функцией времени и при постоянной мощности P выражается формулой $W_а = Pt$.

Отдельно определяется числовая функция.

Числовой функцией с областью определения X называется зависимость, при которой каждому числовому значению x из множества X ставится в соответствие единственное некоторое число y.

Напомним основные способы задания функции: 1) с помощью формулы (примеры 1 и 3); 2) с помощью таблицы (например, таблицы квадратов чисел, значений тригонометрических функций и др.); 3) с помощью графика (например, если фиксировать на протяжении нескольких лет высоту растущего дерева, то, изобразив по оси Ox возраст дерева в годах, а по оси Oy — высоту в метрах, получим график функции) (рис. 1).

Таким образом,

графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $M(x;\ f(x))$ координатной плоскости, абсциссы которых принадлежат области определения функции, а ординаты являются соответствующими значениями этой функции.

Однако следует помнить, что не всегда формула задает функцию. Например, формула $I = \frac{U}{R}$ (закон Ома) задает прямую пропорциональность (функцию от U) при постоянном сопротивлении в цепи и переменном напряжении и обратную пропорциональность (функцию от R) при постоянном напряжении и переменном сопротивлении. Но если из этой формулы выразить R, то $R = \frac{U}{I}$. Последняя формула не задает функцию. Действительно, R — величина постоянная для данного проводника и не зависит ни от напряжения, ни от силы тока. Если напряжение увеличить, например, в 2 раза, то в 2 раза увеличится и сила тока, а отношение напряжения к силе тока не изменится. Сопротивление R — функция (прямая пропорциональность $y = kx$) длины проводника при постоянной площади поперечного сечения и функция площади поперечного сечения (обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$) при постоянной длине проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ — удельное сопротивление материала проводника (постоянная); l — длина проводника; S — площадь его поперечного сечения.

Иногда функцию задают разными формулами на разных множествах значений аргумента (так называемые кусочно-заданные функции). Например, если турист был в дороге 9 ч и первые 5 ч двигался со скоростью 4,5 км/ч, потом отдыхал 0,5 ч, а оставшееся время шел со скоростью 4 км/ч, то функцию пути s в зависимости от времени t запишем в таком виде:

$$s = \begin{cases} 4{,}5t, & \text{если } 0 \le t \le 5, \\ 22{,}5, & \text{если } 5 < t \le 5{,}5, \\ 22{,}5 + 4(t - 5{,}5), & \text{если } 5{,}5 < t \le 9. \end{cases}$$

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. для любых двух значений x_1 и x_2 переменной x, взятых из области определения, и таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. для любых двух значений x_1 и x_2 переменной x, взятых из области определения и таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Для исследования функций на возрастание или убывание (на множестве), исходя из их определений, можно сформулировать алгоритм.

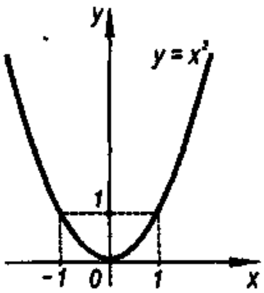

Рис. 2

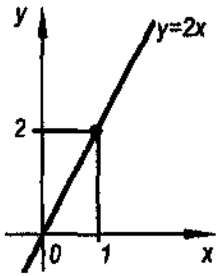

Рис. 3

Алгоритм исследования функции на монотонность

Чтобы исследовать функцию на монотонность, необходимо:

1) выбрать любые два значения x_1 и x_2 из области определения функции такие, что $x_2 > x_1$;

2) составить разность $f(x_2) - f(x_1)$ и выяснить (если это возможно), будет ли она положительной (отрицательной) и, пользуясь определением числового неравенства, убедиться, что $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).

У возрастающей функции график поднимается вверх, в убывающей — опускается вниз.

Среди функций различают четные и нечетные функции. Общим свойством четных и нечетных функций является то, что область определения *каждой из них — это множество* значений x, симметричное относительно начала отсчета, т. е. точки O.

Функция $y = f(x)$ называется четной, если для любого значения x из области определения значение $(-x)$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Иначе говоря, значения четных функций для противоположных значений аргумента равны. График четной функции симметричен относительно оси Oy (рис. 2).

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если для любого значения x из области определения значение $(-x)$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 3).

Примерами четных функций являются $y = x^2$, $y = |x|^3$, а нечетных — $y = 2x$, $y = x^3$. Областью определения этих функций является множество $\boldsymbol{R}$, симметричное относительно начала координат, поскольку для любого x из множества $\boldsymbol{R}$ значение $-x$ также принадлежит $\boldsymbol{R}$. Кроме того, для первых двух функций $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ и $f(-x) = |-x|^3 = |x|^3 = f(x)$, а для двух последних — $f(-x) = 2(-x) = -2x = -f(x)$ и $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Функции $y = \sqrt{x}$ и $y = 2x - 3$ не принадлежат ни к четным, ни к нечетным функциям, поскольку для первой $x \geq 0$ (множество значений x несимметрично относительно начала отсчета 0), а для второй функции, хотя множество $\boldsymbol{R}$ и симметрично относительно 0, но $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

Алгоритм исследования функции на четность и нечетность

Чтобы исследовать функцию на четность или нечетность, необходимо:

1) проверить выполнение условия: для любого x из области определения число $(-x)$ также принадлежит области определения, т. е. проверить, будет ли область определения данной функции множеством, симметричным относительно начала отсчета 0;

2) проверить выполнение условия: $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$.

2. Обзор свойств основных видов функций. Линейная функция $y = kx + b$.

Линейной называется функция, которую можно задать формулой $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — числа.

Если $b = 0$, то формула линейной функции принимает вид $y = kx$. Эта формула, если $b = 0$, $k \neq 0$, например $k = 2$, задает прямую пропорциональность (рис. 3). Графиком линейной функции является прямая (рис. 4). Линейная функция выражает зависимости между переменными разной природы. Например: а) зависимость пути s, который пройдет тело при равномерном движении, от времени t определяют по формуле $s = s_0 + vt$, где s_0 — начальный путь; v — постоянная скорость; б) зависимость длины металлического стержня от температуры t при

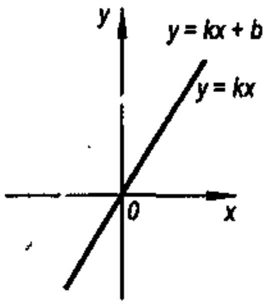

Рис. 4

нагревании задают формулой $l = l_0 + kt$, где l_0 — длина стержня, если $t = 0$; k — коэффициент линейного расширения; в) стоимость N телеграммы по Украине вычисляется по формуле $N = 5x + 5$, где x — количество слов; 5 (к.) — стоимость одного слова; 5 (к.) — тарифная оплата; г) стоимость проезда в такси можно вычислить по формуле $P = 90n + 90$, где n — количество километров (расстояние), которое проехал пассажир; 90 (к.) — стоимость проезда одного километра; 90 (к.) — сумма, которая автоматически фиксируется на счетчике, когда пассажир садится в такси (цены условные).

Напомним свойства линейной функции.

1) Областью определения линейной функции, если она задана формулой $y = kx + b$ без указания характера зависимости между переменными x и y, является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) Возрастание или убывание функции зависит от знака коэффициента k. Если $k > 0$, функция возрастает. Докажем это, используя определение возрастающей функции. Действительно, пусть $x_2 > x_1$, где $x_1 \in \boldsymbol{R}$, $x_2 \in \boldsymbol{R}$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - kx_1 - b = k(x_2 - x_1) > 0$, т. к. $k > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$ согласно выбору k, x_1 и x_2. Поэтому $f(x_2) > f(x_1)$ по определению числового неравенства.

Если $k < 0$, то линейная функция убывающая. Докажите это самостоятельно.

3) Если $k \neq 0$ и $b \neq 0$, то линейная функция не является ни четной, ни нечетной. Действительно, хотя для любого $x \in \boldsymbol{R}$ и $-x \in \boldsymbol{R}$ (область определения является множеством, симметричным относительно точки 0), но $f(-x) = -kx + b \neq f(x)$ и $f(-x) = -kx + b \neq -f(x)$.

Если $k \neq 0$ и $b = 0$, то линейная функция является нечетной, т. к. $f(-x) = -kx = -f(x)$. Графиком ее является прямая, которая проходит через начало координат. Она симметрична относительно начала координат и выражает прямую пропорциональную зависимость.

Если $k = 0$ и b — любое число, линейная функция четная, т. к. $f(-x) = b = f(x)$. График ее — прямая, параллельная оси Ox (или совпадает с ней), и поэтому симметрична относительно оси Oy.

Функция $y = \frac{k}{x}$. Эта функция выражает обратную пропорциональную зависимость.

Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная и число $k \neq 0$.

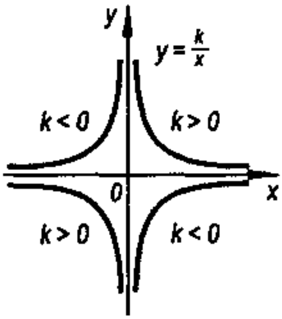

Рис. 5

Графиком функции $y = \frac{k}{x}$ является гипербола, которая состоит из двух веток. Гипербола расположена в I и III четвертях, если $k > 0$, и в II и IV четвертях, если $k < 0$ (рис. 5).

Функция $y = \frac{k}{x}$ выражает зависимости между разными переменными. Например: а) зависимость количества купленного товара на заданную сумму денег от цены товара; б) зависимость силы тока от сопротивления проводника при постоянном напряжении: $I = \frac{U}{R}$ (закон Ома); в) зависимость между давлением газа и объемом, который он заполняет: $p = \frac{k}{V}$ (закон Бойля—Мариотта), где k — постоянная; г) зависимость времени от скорости движения $t = \frac{s}{v}$, где s — постоянный путь, и др.

Напомним свойства функции $y = \frac{k}{x}$.

1) Области определения и изменения функции — все действительные числа, кроме нуля, поскольку $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

2) Если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Докажем, например, если $k > 0$ и $x \in (-\infty; 0)$, то функция убывает.

Действительно, пусть $x_2 > x_1$, где $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} < 0$, т. к. $x_1 x_2 > 0$ (как произведение двух отрицательных чисел); $k > 0$, $x_1 - x_2 < 0$ (по условию выбора k, x_1 и x_2. Поэтому $f(x_2) < f(x_1)$. Аналогично доказываем, если $k > 0$ и $x \in (0; +\infty)$, функция убывает, а при $k < 0$ — возрастает, если $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (0; +\infty)$.

Докажите самостоятельно,что если $k < 0$, то $y = \frac{k}{x}$ возрастает при $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (0; +\infty)$.

3) Функция $y = \frac{k}{x}$ нечетная, т. к. ее областью определения является множество, симметричное относительно точки 0, и $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$.

График функции $y = \frac{k}{x}$ симметричен относительно начала координат.

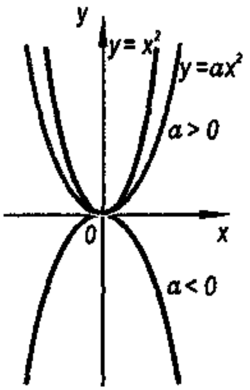

Рис. 6

Функция $y = x^2$. Свойства этой функции вытекают из свойств степени с четным натуральным показателем.

1) Область определения функции — множество всех действительных чисел, т. е. $x \in R$. Область ее изменения — множество неотрицательных чисел, т. е. $y \in [0; +\infty)$.

2) На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает, а на $[0; +\infty)$ — возрастает.

Докажем, что при $x \in (-\infty; 0]$ функция убывает. Пусть $x_2 > x_1$, где $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0$, т. к. $x_2 - x_1 > 0$ по условию, $x_2 + x_1 < 0$ как сумма двух чисел, из которых одно отрицательное, а второе неположительное. Поэтому $f(x_2) < f(x_1)$.

Докажите самостоятельно: если $x \in [0; +\infty)$, то функция $y = x^2$ возрастает.

3) Функция четная, т. к. область ее определения — множество, симметричное относительно 0, и $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

График функции — парабола, симметричная относительно оси Oy (рис. 6).

4) Если $x = 0$, то $y = 0$, следовательно, график проходит через начало координат.

С помощью функции $y = x^2$ выражают зависимость площади квадрата от длины его стороны. На практике, в физике, технике чаще применяют функцию $y = ax^2$, где a — число. С помощью этой функции выражают, например: а) зависимость площади круга от радиуса: $S = \pi r^2$; б) зависимость между кинетической энергией тела и его скоростью: $W_k = \frac{mv^2}{2}$; в) зависимость пути тела, которое свободно падает, от времени: $H = \frac{gt^2}{2}$ (если сопротивлением среды пренебречь).

Графиком функции $y = ax^2$ является также парабола, симметричная относительно оси Oy. Если $a > 0$, ветки параболы направлены вверх, если $a < 0$ — вниз.

Форму параболы $y = ax^2$ имеет цепь, которая поддерживает висящий мост с помощью большого количества стержней (если весом цепи пренебречь); траектория летящего снаряда; осевое сечение автомобильной фары; осевое сечение свободной поверхности жидкости при вращении сосуда с жидкостью вокруг его оси симметрии.

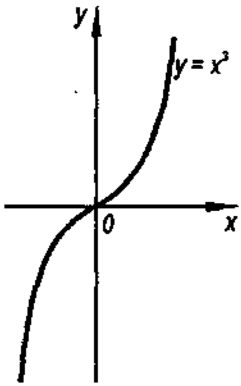

Рис. 7

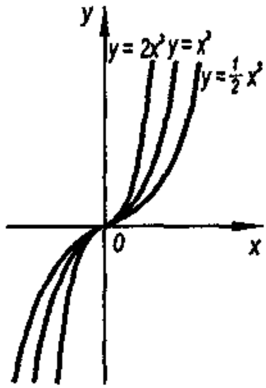

Рис. 8

Функция $y = x^3$. Эта функция выражает, например, зависимость объема куба от длины его стороны. Напомним свойства этой функции, которые вытекают из свойств степени с нечетным натуральным показателем.

1) Области определения и изменения функции — множество всех действительных чисел.

2) Функция возрастающая на всей области определения. Действительно, пусть $x_2 > x_1$, где $x_1 \in \boldsymbol{R}$ и $x_2 \in \boldsymbol{R}$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) = (x_2 - x_1)\left(\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2\right) > 0$, т. к. $x_2 - x_1 > 0$ по условию выбора x_1 и x_2, сумма $\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 > 0$ при любых $x_2 > x_1$ из области определения. Поэтому $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. функция $y = x^3$ — возрастающая.

3) Функция $y = x^3$ нечетная, т. к. область ее определения — множество, симметричное относительно точки 0, и $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Графиком этой функции является кубическая парабола, симметричная относительно начала координат (рис. 7).

4) Если $x = 0$, то $y = 0$, следовательно, график проходит через начало координат.

На практике используют также функцию $y = ax^3$, имеющую такие же свойства, хотя коэффициент a несколько влияет на форму графика (рис. 8). График $y = ax^3$ используют при проектировании железных дорог и автомобильных путей, если надо осуществить плавный переход от прямолинейных к криволинейным участкам пути.

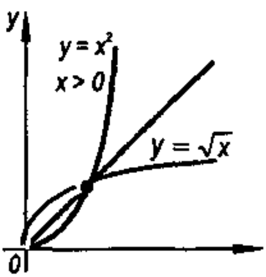

Рис. 9

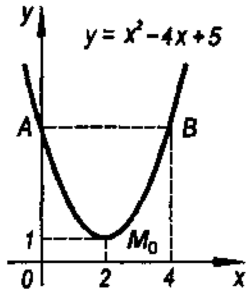

Рис. 10

Функция $y = \sqrt{x}$. С помощью этой функции выражается, например, зависимость стороны квадрата от его площади S.

Свойства функции $y = \sqrt{x}$ вытекают из свойств арифметического корня.

1) Области определения и изменения функции — множество неотрицательных чисел, т. е. $x \in [0; +\infty)$ и $y \in [0; +\infty)$.

2) Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на всей области определения. Действительно, если $x_2 > x_1$, где $x_1 \in [0; +\infty)$ и $x_2 \in [0; +\infty)$, то $f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \dfrac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} =$

$= \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} > 0$, т. к. $(x_2 - x_1) > 0$ по условию выбора x_1, x_2 и

$(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}) > 0$ как сумма положительного и неотрицательного чисел. Итак, $f(x_2 > f(x_1)$, т. е. функция $y = \sqrt{x}$ — возрастающая.

3) Функция $y = \sqrt{x}$ ни четная, ни нечетная, т. к. ее область определения — множество, не симметричное относительно начала координат.

4) Если $x = 0$, то и $y = 0$, т. е. график проходит через начало координат, а поскольку x и y — неотрицательные, то график расположен в I четверти (рис. 9). Графиком функции является расположенная в I четверти ветвь параболы, симметричная ветви параболы $y = x^2$ $(x \geq 0)$ относительно прямой $y = x$.

На практике используют функцию $y = a\sqrt{x}$. В частности, с помощью этой функции выражают зависимость периода T малых колебаний математического маятника от его длины l: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, где g — ускорение силы тяжести.

Квадратичная функция.

Квадратичной называется функция, которую можно задать формулой $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$.

С помощью квадратичной функции выражают зависимость положения тела в любой момент времени при прямолинейном равноускоренном движении: $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_{0x}t^2}{2}$, где x_0 — начальная координата; v_{0x} — проекция начальной скорости на ось Ox; a_{0x} — проекция ускорения.

Графиком квадратичной функции является парабола (рис. 10), вершина которой находится в точке M_0 с координатами $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Это можно показать, если представить формулу $y = ax^2 + bx + c$ в таком виде:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Отсюда следует, что график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить из графика функции $y = ax^2$ следующими геометрическими преобразованиями: последовательный параллельный перенос параболы $y = ax^2$ на $-\frac{b}{2a}$ единиц влево или вправо по оси Ox в зависимости от знака числа $-\frac{b}{2a}$ и параллельный перенос полученного графика по оси Oy вверх или вниз на $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ единиц в зависимости от того, каким будет знак числа $-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$. Каждое дробное число можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых — целое число, а другое — неотрицательная правильная дробь. Например: $10{,}7 = 10 + 0{,}7$; $\sqrt{2} \approx 1 + 0{,}41$; $0{,}5 = 0 + 0{,}5$; $-2{,}25 = -3 + 0{,}75$. Итак,

за целую часть числа x возьмем наибольшее целое число, которое не превышает x.

Целую часть числа x обозначают символом $[x]$, где $x = n + q$, $n \in \mathbf{Z}$, а $0 \leq q < 1$. Очевидно, что $[x] = n$.

При любом x выполняется двойное неравенство

$$[x] \le x < [x] + 1.$$

Формула $y = [x]$, где $[x]$ — целая часть x, задает функцию, областью определения которой является множество всех действительных чисел.

Построим график функции $y = [x]$. Из формулы $x = n + q$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \le q < 1$, $[x] = n$ следует, что когда $0 \le x < 1$, то $y = 0$; если $1 \le x < 2$, то $y = 1$; если $2 \le x < 3$, то $y = 2$, если $-1 \le x < 0$, то $y = -1$ и т. д. Вообще, если $n \le x < n + 1$, где n — целое число, то $y = n$. Итак, на каждом из промежутков $[n; n + 1)$ значение функции y равно n (рис. 11).

График, подобный графику функции $y = [x]$, получим, если изобразим графически зависимость между массой груза и стоимостью его перевозки, когда известно, что за перевозку первой полной или неполной тонны груза надо платить (условно) 2 грн., а за каждую следующую полную или неполную тонну — 1 грн.

Дробной частью числа x называется разность между этим числом и его целой частью.

Дробную часть числа x обозначают $\{x\}$. Из определения следует, что $\{x\} = x - [x]$.

Например, $\{9{,}7\} = 9{,}7 - [9{,}7] = 9{,}7 - 9 = 0{,}7$; $\{-2{,}3\} = -2{,}3 - [-2{,}3] = -2{,}3 - (-3) = -2{,}3 + 3 = 0{,}7$.

Формулой $y = \{x\}$, или $y = x - [x]$, задается функция, областью определения которой является множество всех действительных чисел.

При построении графика $y = \{x\}$ учитываем, что если $0 \le x < 1$, то $[x] = 0$ и формула $y = x - [x]$ принимает вид $y = x$, а графиком функции $y = \{x\}$ является часть прямой $y = x$. Если $x = 1$, то $y = 1 - 1 = 0$, т. е. соответствующая точка графика расположена на оси Ox. Если $1 \le x < 2$, то $[x] = 1$ и $y = \{x\} = x - [x] =$

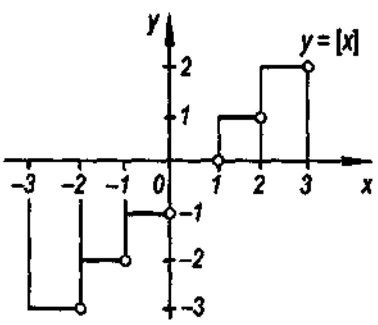

Рис.11

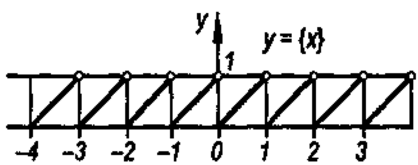

Рис. 12

$= x - 1$, т. е. графиком функции на этом промежутке будет часть прямой $y = x - 1$.

Вообще, если $n \le x < n + 1$, где $n \in Z$, то $[x] = n$, а $y = \{x\} = x - n$, т. е. на каждом промежутке $[n; n+1)$ графиком функции $y = \{x\}$ является часть прямой $y = x - n$ (рис. 12).

3. Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований графиков известных функций. Во многих случаях график определенной функции можно построить с помощью геометрических преобразований (параллельный перенос, симметрия относительно прямой, сжатие к оси, растяжение от оси и т. д.) графика известной функции, через которую выражается данная.

1. Пусть дан график функции $y = f(x)$. Необходимо построить график функции $y = -f(x)$. Например, надо построить график функции $y = -x^2$, если известен график $y = x^2$. Здесь $y = f(x) = x^2$, а $y = -f(x) = -x^2$. Области определения обеих функций совпадают, аргумент x — одинаковый, а значения функций y отличаются только знаком. Это означает, что каждой точке M_0 $(x_0; y_0)$, принадлежащей графику $y = f(x)$, соответствует точка $M(x_0; -y_0)$ графика функции $y = -f(x)$, т. е. точки искомого графика симметричны точкам графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox. Итак, график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика известной функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси Ox (рис. 13).

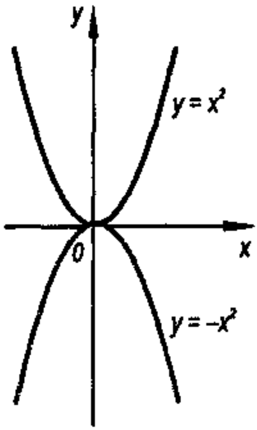

Рис. 13

1. Дано: график $y = f(x) = x^2$.
Построить график функции $y = -f(x) = -x^2$.

Алгоритм

1) Построить график $y = f(x)$.
2) Отобразить построенный график симметрично относительно оси Ox.
Получим график функции $y = -f(x)$.

2. Пусть дан график функции $y = f(x)$, а надо построить график функции $y = f(-x)$. Например, дан график $y = \sqrt{x}$. Необходимо построить график функции $y = \sqrt{-x}$. Аргументы функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ отличаются знаками. Пусть точка M_0 $(x_0; y_0) \in f(x)$. Найдем координаты соответствующей точки $M(x; y) \in f(-x)$. Введем подстановку $x_0 = -x$, отсюда $x = -x_0$, $y = f(-x) = f(x_0) = y_0$. Итак,

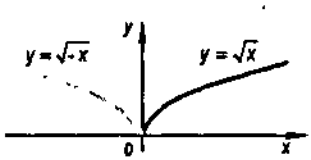

Рис. 14

2. Дано: график функции

$$y = f(x) = \sqrt{x}\ .$$

Построить график

$$y = f(-x) = \sqrt{-x}\ .$$

Алгоритм

1) Построить график $y = f(x)$.
2) Отобразить построенный график симметрично относительно оси Oy.
Получим график $f(-x)$.

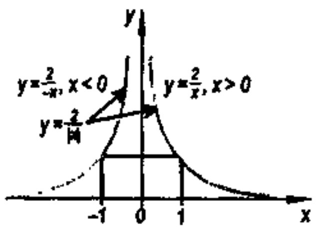

Рис. 15

3. Дано: график функции

$$y = f(x) = \frac{2}{x}\ .$$

Построить график

$$y = f(|x|) = \frac{2}{|x|}\ .$$

Алгоритм

1) Построить график $y = f(x)$ для $x > 0$.
2) Отобразить построенный график симметрично относительно оси Oy. Объединение этих графиков является графиком $y = f(|x|)$.

точка M имеет противоположную абсциссу и одну и ту же ординату, т. е. $M(-x_0;\ y_0)$. Это означает, что график функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью отображения симметрии его относительно оси Oy (рис. 14).

3. Построить график функции $y = f(|x|)$, если известен график функции $y = f(x)$. Например, построить график функции $y = \frac{2}{|x|}$, если известен график функции $y = \frac{2}{x}$. Почти во всех упражнениях, связанных с модулем, приходится освобождаться от модуля числа, пользуясь его определением:

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Итак,

$$f(|x|) = \frac{2}{|x|} = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \frac{2}{-x}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что график функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$, если $x \geq 0$, и с графиком $y = f(-x)$, если $x < 0$.

Для построения графика функции $y = \frac{2}{|x|}$ достаточно построить график функции $y = \frac{2}{x}$, если $x > 0$, и график функции $y = \frac{2}{-x}$, если $x < 0$. Объединив две построенные кривые, мы получим график функции $y = \frac{2}{|x|}$ (рис. 15).

Нетрудно доказать, что функция $y = f(|x|)$ четная. Действительно, область определения — множество значений x, симметричных относительно начала отсчета, и $f(|-x|) = f(|x|) = f(x)$.

4. Построить график функции $y = |f(x)|$, если известен график функции $y = f(x)$. Пусть известен график функции $y = 2x + 1$, построим график $y = |2x + 1|$. Учтем, что

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что график функции $y = |f(x)|$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$ на промежутке, где $f(x) \geq 0$, и с графиком функции $y = -f(x)$ на промежутке, где $f(x) < 0$.

Итак, для построения графика функции $y = |2x + 1|$ достаточно построить график линейной функции $y = 2x + 1$, а ту часть прямой, которая расположена ниже оси Ox, отобразить симметрично относительно оси Ox. Ломаная, которая лежит выше оси Ox, включая точку на этой оси, будет графиком функции $y = |2x + 1|$ (рис. 16).

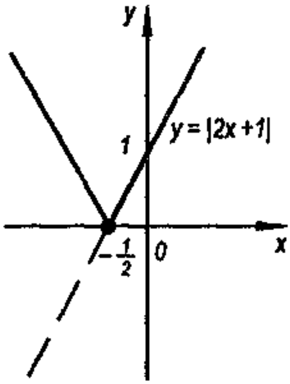

Рис. 16

4. Дано: график функции
$y = f(x) = 2x + 1$.
Построить график
$y = |f(x)| = |2x + 1|$.

Алгоритм

1) Построить график функции $y = f(x)$.
2) Отобразить часть построенного графика, которая расположена ниже оси Ox, симметрично относительно Ox.

5. Построить графики функций $y = f(x) \pm b$, где $b > 0$, если известен график функции $y = f(x)$. Области определения обеих функций совпадают, аргументы их одинаковые, а значения функций отличаются на b или $-b$. Это означает, что все точки, например, графика $y = f(x) + b$ имеют те же самые абсциссы, что и соответствующие точки графика $y = f(x)$, а ординаты увеличены на b. Поэтому искомый график легко получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса его по оси Oy на b единиц вверх.

Например, графики функций $y = x^2 \pm 3$ можно получить из графика функции $y = x^2$ с помощью параллельного переноса его на 3 единицы вверх для $y = x^2 + 3$ и на 3 единицы вниз для $y = x^2 - 3$ (рис. 17).

6. Известен график функции $y = f(x)$. Надо построить график функции $y = f(x \pm a)$, где $a > 0$. Например, пусть известен график функции $y = x^2$. Построим графики функции $y = (x \pm 2)^2$.

Рассмотрим случай построения графика функции $y = f(x - a)$. Пусть $M_0(x_0; y_0) \in f(x)$. Найдем координаты соответствующей точки $M(x; y) \in f(x - a)$. Введем подстановку: $x_0 = x - a$,

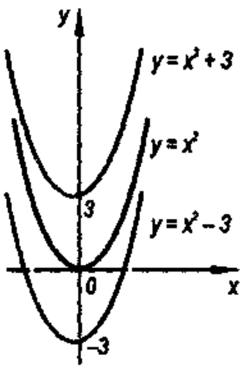

Рис. 17

5. Дано: график функции $y = f(x) = x^2$. Построить график функции $y = f(x) \pm \pm b = x^2 \pm 3$.

Алгоритм

1) Построить график $y = f(x)$.
2) Параллельно перенести построенный график в направлении оси Oy вверх на b единиц, если $y = f(x) + b$, и вниз на b единиц, если $y = f(x) - b$.

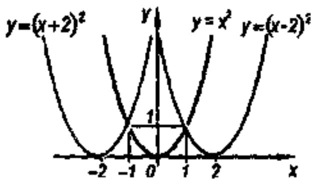

Рис. 18

6. Дано: график функции $y = f(x) = x^2$. Построить график $y = f(x \pm a) = (x \pm 2)^2$.

Алгоритм

1) Построить график $y = f(x)$.
2) Параллельно перенести построенный график в направлении оси Ox вправо на a единиц, если $y = f(x-a)$, и влево на a единиц, если $y = f(x + a)$.

отсюда $x = x_0 + a$, $y = f(x - a) = f(x_0) = y_0$. Итак, абсцисса точки $M(x_0 + a; y_0)$ на a единиц больше абсциссы точки $M_0(x_0; y_0)$, а ордината та же самая. Это означает, что любая точка графика функции $y = f(x)$ переходит в соответствующую точку графика функции $y = f(x - a)$ с помощью параллельного переноса ее вправо по оси Ox на a единиц.

Обоснуйте самостоятельно построение графика $y = f(x + a)$.

Таким образом, графики функций $y = (x \pm 2)^2$ можно получить из графика функции $y = x^2$ с помощью параллельного переноса его на 2 единицы вправо по оси Ox, если $y = (x - 2)^2$, и на 2 единицы влево, если $y = (x + 2)^2$ (рис. 18).

7. Построить график функции $y = af(x)$, где $a > 0$, если известен график $y = f(x)$.

Например, построим графики функций $y = 3x^3$ и $y = \frac{1}{3}x^3$, если известен график функции $y = x^3$.

Области определения и аргументы обеих функций одинаковые. Значение функции при любом x для функции $y = af(x)$ в a раз изменяется по сравнению с функцией $y = f(x)$. Если $a > 1$, ордината увеличивается в a раз, если $0 < a < 1$ — уменьшается. Поэтому график функции $y = af(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью растяжения его в a раз от оси Ox, если $a > 1$, и с помощью сжатия в a раз к оси Ox, если $0 < a < 1$.

В частности, график функции $y = 3x^3$ можно получить из графика $y = x^3$ с помощью растяжения его от оси Ox в 3 раза, а график функции $y = \frac{1}{3}x^3$ — с помощью сжатия его к оси Ox в 3 раза (рис. 19).

8. Известен график функции $y = f(x)$. Построить график функции $y = f(ax)$, где $a > 0$.

Например, по известному графику функции $y = \{x\}$ построить графики функций $y = \{2x\}$ и $y = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$.

Поскольку над переменной x во второй функции выполняется действие умножения на число a, введем подстановку и найдем координаты точки $M(x; y) \in f(ax)$, в которую перейдет точка $M_0(x_0; y_0) \in f(x)$. Пусть $x_0 = ax$, отсюда $x = \frac{x_0}{a}$, $y = f(ax) = f(x_0) = y_0$. Итак, $M\left(\frac{x_0}{a}; y_0\right)$. Это означает, что любая точка графика функции $y = f(x)$ перейдет в точку графика функции $y = f(ax)$ с абсциссой $\frac{x_0}{a}$ и такой же ординатой. Очевидно, если $a > 1$, абсцисса точки M уменьшается в a раз, а если $0 < a < 1$, — увеличивается в a раз. Это означает, что график функции $y = f(ax)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью его растяжения или сжатия к оси Oy.

Графики функций $y = \{2x\}$ и $y = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$ изображены на рисунке 20.

Замечание 1. Приведенные восемь преобразований назовем **основными**. Во время построения графиков сложных функций основные преобразования можно выполнять в любой последовательности. И все-таки преобразования (5) и (6) целесообразнее делать последними, поскольку сжатие и растяжение построенных графиков (преобразования (7) и (8)) удобнее выполнять от начала координат.

Замечание 2. Прежде чем выполнить преобразование (6), необходи-

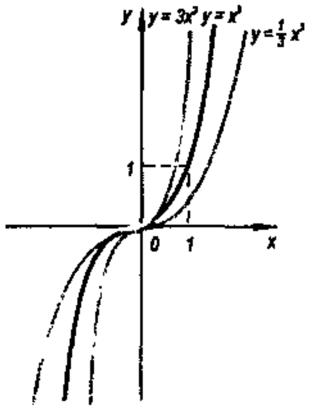

Рис. 19

7. Дано: график функции $y = f(x) = x^3$. Построить графики $y = af(x) = 3x^3$ и $y = \frac{1}{3}x^3$.

Алгоритм

1) Построить график $y = f(x)$.
2) Растянуть его в a раз от оси Ox, если $a > 1$, сжать к оси Ox в a раз, если $0 < a < 1$.

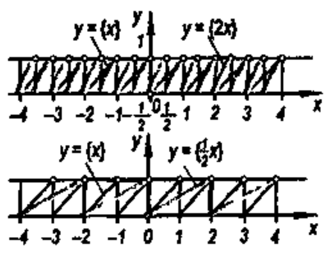

Рис. 20

8. Дано: график функции $y = f(x) = \{x\}$.
Построить графики $y = f(ax) = \{2x\}$ и $y = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$.

Алгоритм

1) Построить график $y = f(x)$.
2) Сжать его к оси Oy в a раз, если $a > 1$, растянуть от оси Oy в a раз, если $0 < a < 1$.

мо проверить, равен ли единице в формуле функции коэффициент при аргументе x. Если нет, то следует привести формулу к требуемому виду. Например, чтобы построить график функции $y = \sqrt{2-x}$, необходимо предварительно записать эту формулу в виде $y = \sqrt{-(x-2)}$ и преобразовывать график в такой последовательности: 1) построить известный график $y = \sqrt{x} = f(x)$; 2) построить график $y = \sqrt{-x} = f(-x)$; 3) построить искомый график, выполнив параллельный перенос предыдущего графика $y = \sqrt{-x}$ на 2 единицы вправо по оси Ox.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Ключевыми понятиями математического анализа, начала которого изучают в школе, являются понятия функции, предела, производной и интеграла.

Термин «функция» впервые предложил в 1692 г. выдающийся немецкий философ и математик **Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1646—1716) для характеристики разных отрезков, которые соединяют точки некоторой кривой. Первое определение функции, которое уже не было связано с геометрическими представлениями, сформулировал **Иоганн Бернулли** (1667—1748) в 1718 г. Позднее, в 1748 г. уточненное определение функции дал ученик И. Бернулли **Леонард Эйлер** (1707—1783). Эйлеру принадлежит и символ функции $f(x)$.

Леонард ЭЙЛЕР
(1707—1783)

В определениях Бернулли и Эйлера функцию отождествляли с аналитическим выражением (формулой), которым она задается. Эйлер также считал, что одну и ту же функцию на разных множествах можно задавать разными аналитическими выражениями. Эти так называемые кусочно-заданные функции широко применяются на практике.

Еще во времена Эйлера стало понятно, что отождествление функции с ее аналитическим выражением сужает само понятие функции, т. к., во-первых, одним и тем же выражением можно задать разные функции, во-вторых, не всегда функцию можно задать аналитически. Еще

Иоганн БЕРНУЛЛИ
(1667—1748)

Николай Иванович
ЛОБАЧЕВСКИЙ
(1792—1856)

Эйлер предполагал возможность задавать функцию только графиком.

Дальнейшее развитие математического анализа и практическое применение математики привели к расширению понятия функции. В 1834 г. выдающийся русский математик **Н. И. Лобачевский** (1792—1856) сформулировал определение функции, в основу которого была положена идея соответствия: «Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое задается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть задано или аналитическим выражением, или условием, которое дает способ испытания всех чисел и выбора одного из них, или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной».

Уже через три года немецкий математик **Лежен Дирихле** (1805—1859) сделал следующее обобщение понятия функции: «y является функцией переменной x (на отрезке $a \leq x \leq b$), если каждому значению x соответствует вполне определенное значение y, причем не имеет значения, каким образом установлено это соответствие — аналитической формулой, графиком, таблицей или даже просто словами».

Во второй половине XIX ст. после создания теории множеств к определению функции кроме идеи соответствия была привлечена идея множеств, и поэтому современное определение функции формулируют так: «Соответствие между множествами X и Y, при котором каждому элементу x множества X соответствует определенный элемент y множества Y, называют функцией».

В XX ст. произошло дальнейшее расширение понятия функции, вызванное потребностями физики. В 1930 г. английский физик **Поль Дирак** (1902—1984) ввел понятие так называемой дельта-функции, а в 1936 г. русский математик и механик **С. Л. Соболев** (1908—1990) ввел более широкое понятие обобщенной функции, которое охватывает и дельта-функцию.

Таким образом, понятие функции развивается и расширяется в соответствии с потребностями развития математической науки и ее практического применения.

ВОПРОСЫ [illegible] ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что называется функцией? Как обозначают функции? Привести примеры функций.
2. Что такое область определения функции?
3. Что такое область значений, или область изменения, функции? Привести примеры.
4. Назвать основные способы задания функции.
5. Любая ли формула задает функцию?
6. Какая функция называется возрастающей? Привести примеры.
7. Какая функция называется убывающей? Привести примеры.
8. Как исследовать функцию на возрастание или убывание с помощью определения?
9. Какая функция называется четной? Привести примеры.
10. Какая функция называется нечетной? Привести примеры.
11. Как исследовать функцию на четность или нечетность?
12. Какие свойства графиков четной и нечетной функций вам известны?
13. Какая функция называется линейной? Что является ее графиком?
14. Назвать свойства линейной функции. Доказать одно из них.
15. Привести примеры зависимостей, которые задаются с помощью линейной функции.
16. Какая функция называется обратной пропорциональностью? прямой пропорциональностью? Привести примеры зависимостей, которые задаются с помощью этих функций.
17. Назвать свойства функции $y = \frac{k}{x}$. Доказать свойство нечетности функции $y = \frac{k}{x}$.

18. Что является графиком функции $y = \frac{k}{x}$?

19. Назвать свойства функции $y = x^2$. Доказать свойство убывания этой функции на множестве $(-\infty; 0]$.

20. Назвать свойства функции $y = x^3$ и доказать свойство ее возрастания. Что является графиком этой функции?

21. Назвать свойства функции $y = \sqrt{x}$. Доказать свойство возрастания этой функции.

22. Какая функция называется квадратичной? Привести пример зависимости, которая задается с помощью квадратичной функции.

23. Что является графиком квадратичной функции?

24. Доказать, что вершиной графика квадратичной функции является точка $M\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

25. Построить график функции $y = [x]$.

26. Построить график функции $y = \{x\}$.

27. Назвать основные виды преобразований при построении графиков функции с помощью графиков известных функций.

28. Как построить графики функций $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, если дан график функции $y = f(x)$?

29. Как построить графики функций $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$, если дан график функции $y = f(x)$?

30. Как построить графики функций $y = f(x) \pm a$, $y = f(x \pm a)$, если дан график функции $y = f(x)$ и $a > 0$?

31. Как построить графики функций $y = kf(x)$ и $y = f(kx)$, если дан график функции $y = f(x)$ и $k > 0$?

УПРАЖНЕНИЯ[1]

1. Найти область определения функции:

А

1) $y = \frac{6}{x-1}$; 2) $y = \sqrt{x-2}$; 3) $y = \sqrt[3]{\frac{3x-5}{x+2}}$;

4) $y = \sqrt{\frac{x-5}{2x+3}}$; 5) $y = \frac{2x}{x^2-5x+6}$; 6) $y = \sqrt{x^2+x-2}$;

[1] Здесь и далее буквами [illegible], [illegible], [illegible] обозначены упражнения трех уровней сложности: обязательного, повышенного и углубленного.

В упражнениях на с. 25—27 все корни — арифметические, где арифметическим корнем любой натуральной степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равняется a.

7) $y=\frac{3}{x^2-1}$; 8) $y=\frac{2}{x}-\frac{1}{x-5}$.

9) $y=\sqrt{x}+\sqrt{3-x}$; 10) $y=\frac{x}{x^2+x+1}$; 11) $y=\sqrt{16-x^2}$;

12) $y=\sqrt{4-|x|}$; 13) $y=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+3}$; 14) $y=\frac{4}{\sqrt{25-x^2}}$;

15) $y=\frac{2-x}{\sqrt[3]{2x-6}}$; 16) $y=\frac{x}{|x|}$.

17) $y=\frac{3}{4-\sqrt{x^2}}$; 18) $y=\sqrt{4-x}+\sqrt[4]{x-2}+\frac{4}{x-3}$;

19) $y=\frac{5}{\sqrt{9-|x|}}+\frac{1}{x-5}$; 20) $y=\frac{2}{|x|-1}+\frac{1}{x}$.

2. Исследовать на четность и нечетность функцию:

1) $y=x+x^3$; 2) $y=x^2-2$; 3) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$;

4) $y=x+\frac{1}{x}$; 5) $y=\sqrt{1-x^2}$; 6) $y=\sqrt[3]{x^2}$.

7) $y=x^4-2x^2+3$; 8) $y=\sqrt{x}$; 9) $y=\sqrt[3]{x}$;

10) $y=x^3-5x+1$; 11) $y=\frac{x^2-x}{x-1}$; 12) $y=x^2-|x|$.

13) $y=|x^5|$; 14) $y=\frac{\sqrt[4]{4-x^2}}{x}$; 15) $y=\frac{2x}{x-3}$;

16) $y=\frac{2x}{x^2+|x|+1}$; 17) $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$; 18) $y=\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}$.

3. Построить график функции:

1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=\frac{1}{x+2}$; 3) $y=\frac{1}{x-2}$; 4) $y=\sqrt{x}$;

5) $y = -\sqrt{x+1}$; 6) $y = -\sqrt{x-1}$; 7) $y = |x|$; 8) $y = |x-3|$;

9) $y = |x+3|$; 10) $y = x^3$; 11) $y = |x^3| + 4$; 12) $y = \frac{1}{2}|x^3| + 4$;

13) $y = x^2 - 5x + 6$; 14) $y = x^2 - 5|x| + 6$.

Б

15) $y = \frac{6}{2-x}$; 16) $y = \sqrt{1-x}$; 17) $y = (x+3)^3 + 1$;

18) $y = |x^2 - 5x + 6|$; 19) $y = 2 - \sqrt{-x}$; 20) $y = |2x+3|$;

21) $y = \left(|x| - \frac{1}{2}\right)^3 + 1$; 22) $y = (2x+1)^2$; 23) $y = |x^3 - 1| - 3$.

В

24) $y = \frac{6}{2-x} + 3$; 25) $y = \frac{2-x}{3x+1}$; 26) $y = \frac{3}{3x-2}$;

27) $y = \sqrt{2-x}$; 28) $y = \sqrt{2x-1} + 3$; 29) $y = 2\sqrt{1-3x}$;

30) $y = |2x-3|$; 31) $y = -(x-1)^3$; 32) $y = 2 - \sqrt{1-|x|}$;

33) $y = \frac{|x|}{x}$; 34) $y = |x+1| - x$; 35) $y = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2}$.

§ 2. Тригонометрические функции угла

В курсе геометрии 8-го класса были введены определения синуса, косинуса и тангенса острого угла как отношения сторон в прямоугольном треугольнике.

Синусом острого угла α прямоугольного треугольника (обозначается $\sin\alpha$) называется отношение противолежащего катета a к гипотенузе c (рис. 21).

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$$

Косинусом острого угла α прямоугольного треугольника (обозначается $\cos a$) называется отношение прилежащего катета b к гипотенузе c.

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$$

Тангенсом острого угла α прямоугольного треугольника (обозначается tg α) называется отношение противолежащего катета a к прилежащему катету b

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Было доказано, что синус и косинус острого угла треугольника зависят лишь от меры угла и не зависят от длины сторон треугольника, его расположения, т. е. синус, косинус, а значит, и тангенс являются функциями меры угла. Позже для углов от 0° до 180° определения этих функций были введены с помощью окружности с радиусом R в системе координат (координатный способ определения).

Синусом угла α называется отношение ординаты y точки $P_\alpha(x; y)$ окружности к ее радиусу R (рис. 22).

$$\sin \alpha = \frac{y}{R}$$

Косинусом угла α называется отношение абсциссы x точки $P_\alpha(x; y)$ окружности к ее радиусу R.

$$\cos \alpha = \frac{x}{R}$$

Тангенсом угла α называется отношение ординаты y точки $P_\alpha(x; y)$ окружности к абсциссе x этой точки.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

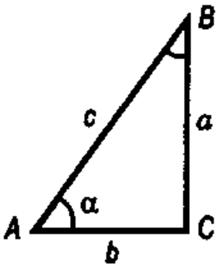

Рис. 21

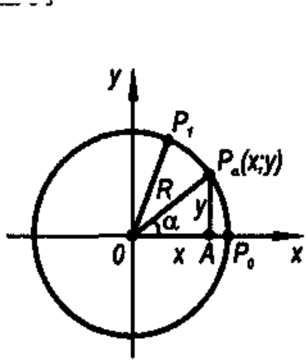

Рис. 22

Для tg α угол $\alpha = 90^\circ$ исключают, т. к. при $\alpha = 90^\circ$ абсцисса равна 0, а делить на 0 нельзя.

При таком определении тригонометрических функций $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\text{tg}\,180^\circ = 0$. Если принять во внимание, что лучи, которые совпадают, образуют угол 0°, то $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\text{tg}\,0^\circ = 0$.

Напомним, что для любого угла $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$. Для угла $\alpha \neq 90^\circ$ $\text{tg}(180^\circ - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$.

Котангенсом угла α называется [illegible] x точки $P_\alpha(x; y)$ окружности к ординате y [illegible]

$$\boxed{\text{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}}$$

Если любой угол рассматривать как фигуру, образованную вращением луча вокруг начальной точки в двух возможных направлениях (положительном, против часовой стрелки, и отрицательном, по часовой стрелке), то введенные определения тригонометрических функций можно применять для любых углов.

$$\boxed{\begin{array}{llll}
\sin\alpha = \dfrac{y}{R}; & \cos\alpha = \dfrac{x}{R}; & \text{tg}\,\alpha = \dfrac{y}{x}; & \text{ctg}\,\alpha = \dfrac{x}{y}; \\
\cos 90^\circ = 0; & \sin 180^\circ = 0; & \cos 180^\circ = -1; & \text{tg}\,180^\circ = 0. \\
\sin 0^\circ = 0; & \cos 0^\circ = 1; & \text{tg}\,0^\circ = 0; & \\
\multicolumn{2}{l}{\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha;} & \multicolumn{2}{l}{\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha.} \\
\multicolumn{4}{l}{\text{tg}(180^\circ - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha,\ \text{где}\ \alpha \neq 90^\circ;}
\end{array}}$$

Углы произвольного размера описывают стрелки часов, точки вращающихся частей механизмов и т. п.

Пример 1. Записать угол β в виде $\beta = \alpha + 360^\circ n$, где $n \in \mathbf{Z}$, α — положительный угол, меньше 360°, если:

$$1)\ \beta = 2000^\circ; \quad 2)\ \beta = -490^\circ.$$

Р е ш е н и е . 1) Разделим 2000° на 360°. Итак, данный угол состоит из 5 полных оборотов и еще 200°. Поэтому $\beta = 2000^\circ = 200^\circ + 360^\circ \cdot 5$, $n = 5$, $\alpha = 200^\circ$.

2) Из равенства $-490^\circ = \alpha + 360^\circ n$ найдем условие, которое может удовлетворять n, чтобы угол α был положительным. Решим последнее уравнение относительно α: $\alpha = -490^\circ - 360^\circ n$.

При условии $\alpha > 0$ имеем: $-490^\circ - 360^\circ n > 0$. Решим это неравенство относительно n: $360^\circ n < -490^\circ$; $n < -\dfrac{490^\circ}{360^\circ}$, или $n < -1\dfrac{13}{36}$.

Ближайшее целое число n, которое удовлетворяет это неравенство, это $n = -2$. Из равенства $\alpha = -490° - 360°n$ найдем α, подставляя значение n. Имеем: $\alpha = -490° - 360° \cdot (-2) = -490° + 720° = 230°$. Итак, $-490° = 360° \cdot (-2) + 230°$, $n = -2$, $\alpha = 230°$.

Пример 2. Стрелки часов показывают ровно 12 ч. Через какой наименьший интервал времени минутная стрелка снова совместится с часовой?

Решение. Минутная стрелка делает полный оборот, т. е. поворачивается на угол в 360° за 60 мин. Поэтому за 1 мин она поворачивается на $\frac{360°}{60} = 6°$. Часовая стрелка делает полный оборот за 12 ч, или за 720 мин. Итак, за 1 мин она поворачивается на $\frac{360°}{720} = 0{,}5°$.

Когда часы показывают 12 ч, то наименьший, отличный от нуля, угол между часовой и минутной стрелками равен 360°. Обозначая искомый интервал времени в минутах через x, получим уравнение $6x - \frac{1}{2}x = 360°$. Отсюда $x = 65\frac{5}{11}$ (мин), или 1 ч $5\frac{5}{11}$ мин.

Итак, минутная стрелка совместится с часовой не раньше чем через 1 ч $5\frac{5}{11}$ мин.

В геометрии термин «угол» используют для обозначения двух понятий: 1) геометрической фигуры, образованной двумя лучами с общим началом; 2) величины, характеризующей степень отклонения одного луча от другого ($0° \le \alpha \le 180°$), или одной прямой от другой при их пересечении ($0° \le \alpha \le 90°$), или угла поворота ($-\infty < \alpha < +\infty$).

Когда речь идет об аргументе тригонометрической функции, то термин «угол» (синус угла, косинус угла) используют в понимании величины, а не фигуры.

Известно, что каждому центральному углу отвечает определенная дуга окружности заданного радиуса. Если развернутый центральный угол разделить на 180 равных частей (каждая часть называется градусом), то и соответствующая дуга (полуокружность) также делится на 180 равных частей. Величину каждой из дуг, на которые разобьется полуокружность, также называют градусом. Иногда для угла используют термин «угловой градус», а для дуги — «дуговой градус».

Существуют разные системы измерения углов и дуг. Кроме градуса и его частей (минуты, секунды) в геометрии как единицу измерения углов используют прямой угол. Эту единицу обозначают буквой d. Например, угол α, равный 30°, в единицах прямого угла обозначают так: $\alpha = \frac{1}{3}d$.

В астрономии за единицу измерения углов принимают угловой час. Это угол, который составляет $\frac{1}{6}$ часть прямого.

В технике за единицу измерения углов взят полный оборот. Речь идет о числе оборотов вала, шкива, махового колеса и т. п.

В артиллерии углы измеряют в так называемых делениях угломера. Большое деление угломера — это $\frac{1}{60}$ часть полного оборота. Малое деление угломера равно $\frac{1}{100}$ части большого деления. Угол, измеряемый в таких единицах, записывают так: 28—32, что означает 28 больших и 32 малых деления угломера.

Моряки измеряют углы в румбах. Эта единица равна $\frac{1}{16}$ части развернутого угла.

В картографии в некоторых странах за единицу измерения углов взят град. Град равен $\frac{1}{200}$ части развернутого угла и обозначается символом g. Например, $\angle AOB = 5^g$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Сформулировать определения тригонометрических функций острого угла в прямоугольном треугольнике.

2. Сформулировать определения синуса и косинуса произвольного угла.

3. Как обозначаются тангенс и котангенс угла?

4. Какие существуют системы измерения угловых величин?

УПРАЖНЕНИЯ

4. Записать угол β в виде $\beta = \alpha + 360°n$, где $n \in \mathbf{Z}$, а α — положительный угол, меньше 360°, если: 1) $\beta = -180°$; 2) $\beta = -780°$; 3) $\beta = 1580°$; 4) $\beta = 7242°$; 5) $\beta = -1690°$.

5. Изобразить на окружности в системе координат угол $\beta = \alpha + 360°n$ при таких значениях n и α: 1) $n = 3$, $\alpha = 40°$; 2) $n = -2$, $\alpha = 30°$; 3) $n = 5$, $\alpha = -25°$; 4) $n = -3$, $\alpha = 48°$.

6. Колесо машины за 2 с делает 6 оборотов. Записать в градусах угол, на который поворачивается колесо за 1 с; 10 с.

7. Через сколько минут после того, как часы покажут 3 ч, минутная стрелка «догонит» часовую?

§ 3. Радианная система измерения углов и дуг

В математике, астрономии, физике, технике используют радианную систему измерения углов и дуг, которая имеет определенные преимущества перед другими системами. Введение радианной системы обусловлено свойством соответствия дуг центральным углам. Рассмотрим две концентрические окружности с радиусами r_1 и r_2 (рис. 23) и два разных центральных угла $\angle AOB = \alpha^\circ$ и $\angle DOC = \beta^\circ$ с соответствующими дугами l_1 и l_2, l_1' и l_2'. По известной формуле длины дуги имеем:

$$l_1 = \frac{\pi\alpha^\circ r_1}{180^\circ}; \quad l_2 = \frac{\pi\alpha^\circ r_2}{180^\circ};$$

$$l_1' = \frac{\pi\beta^\circ r_1}{180^\circ}; \quad l_2' = \frac{\pi\beta^\circ r_2}{180^\circ}.$$

Разделив обе части каждого из этих четырех равенств на соответствующий радиус, получим:

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}; \quad \frac{l_2}{r_2} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}; \quad \frac{l_1'}{r_1} = \frac{\pi\beta^\circ}{180^\circ}; \quad \frac{l_2'}{r_2} = \frac{\pi\beta^\circ}{180^\circ}.$$

Отсюда $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = m$, $\frac{l_1'}{r_1} = \frac{l_2'}{r_2} = n$. Если $\alpha^\circ > \beta^\circ$, то $m > n$.

Итак, для данного центрального угла отношения длин дуг концентрических окружностей к длинам соответствующих радиусов — величина постоянная. Это отношение зависит от величины угла, поэтому может быть характеристикой величины центрального угла:

$$\frac{l}{r} = a.$$

Число a характеризует меру данного центрального угла. Если $l = r$, то $a = 1$. Поэтому

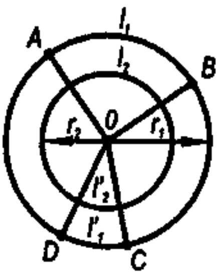

Рис. 23

в радианной системе за единицу измерения углов и дуг принимают такой центральный угол, для которого длина соответствующей дуги равна длине радиуса.

Длина полуокружности с радиусом r равна πr, поэтому радианная мера развернутого угла равна $\frac{\pi r}{r} = \pi$ рад. Учитывая, что градусная мера развернутого угла составляет 180°, а его радианная мера равна π рад, то 1 рад = $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57{,}3^{\circ}$, а $1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$ рад $\approx 0{,}01745$ рад.

Пусть α° — градусная мера некоторого угла, а a — его радианная мера. Поскольку градусная мера угла, образованного при одном обороте точки $P_0(1;\ 0)$, равна 360°, а его радианная мера равна 2π, то $\frac{360^{\circ}}{\alpha^{\circ}} = \frac{2\pi}{a}$.

Отсюда $a = \frac{\pi\alpha^{\circ}}{180^{\circ}}$ и $\alpha^{\circ} = \frac{a \cdot 180^{\circ}}{\pi}$, т. е. мы получили формулы перехода от градусной меры угла к радианной и наоборот.

Используя эти формулы для нахождения радианной и градусной мер угла, следует учитывать правила приближенных вычислений. Даже если наперед задать точное значение градусной или радианной меры угла (это может быть лишь в теоретических расчетах), то вычисленные по формулам перехода значения будут приближенными с точностью, которая зависит от выбора приближенного значения числа π.

Пример 1. Найти радианную меру угла 108°.

Р е ш е н и е. Имеем $a = \frac{\pi\alpha^{\circ}}{180^{\circ}}$, $a = \frac{\pi \cdot 108^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{3}{5}\pi$. Если $\pi \approx 3{,}14$, то $a \approx \frac{3}{5} \cdot 3{,}14 = 0{,}6 \cdot 3{,}14 = 1{,}884 \approx 1{,}88$ (рад), если считать, что градусная мера задана точным значением.

Пример 2. Определить градусную меру угла, радианная мера которого приближенно равна 2,3 рад.

Р е ш е н и е. Имеем $\alpha^{\circ} = \frac{a \cdot 180^{\circ}}{\pi}$, $\alpha^{\circ} \approx \frac{2{,}3 \cdot 180^{\circ}}{\pi}$; при $\pi \approx 3{,}14$, $\alpha^{\circ} \approx \frac{2{,}3 \cdot 180^{\circ}}{3{,}14} \approx 132^{\circ} \approx 130^{\circ}$.

В радианной системе не было введено обозначение единицы измерения, т. е. обозначение радиана. Поэтому если угол как аргумент тригонометрической функции измерен в радианах, то под знаком тригонометрической функции записывают только числовое значение меры угла. Например, $\sin 2$, $\cos\frac{\pi}{4}$.

Особенностью радианной меры является то, что ее единица (один радиан) содержится в развернутом угле не целое число раз, например 1°, а иррациональное: $\pi \approx 3{,}14$.

Преимущество радианной меры перед другими состоит в том, что для малых углов, измеряемых в радианах, выполняются приближенные равенства: $\sin\alpha \approx \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

Действительно, пусть $\alpha = 3^{\circ}$. По таблице перехода от градусной меры к радианной находим, что $3^{\circ} \approx 0{,}0524$ рад. По таблицам значений тригонометрических функций для углов, измеренных в градусной мере, $\sin 3^\circ \approx 0{,}0523$. Если угол α измерен в радианной мере, то $\sin 0{,}0524 \approx 0{,}0523$, т. е. $\sin \alpha \approx \alpha$.

В градусной мере аналогичное приближенное равенство $\sin 3^\circ \approx 3$ не имеет смысла. Указанное преимущество радианной меры широко применяется в математическом анализе и других науках.

Преимущество радианной меры состоит еще и в том, что известная из геометрии формула длины дуги, измеренной в градусах, $l = \frac{\pi r \alpha^\circ}{180^\circ}$ и формула площади сектора $S = \frac{\pi r^2 \alpha^\circ}{360^\circ}$ в радианной мере упрощаются и имеют вид $l = ra$, $S = \frac{ar^2}{2}$, где r — радиус окружности; a — радианная мера дуги.

Радианная мера дает возможность ввести понятие тригонометрической функции произвольного числового аргумента.

ВОПРОСЫ И [illegible]

1. Что положено в основу введения радианной системы измерения угловых величин?

2. Что такое радиан?

3. Какие преимущества и особенности радианной системы измерения угловых величин по сравнению с другими системами?

4. Какая существует зависимость между градусной и радианной мерами угла?

УПРАЖНЕНИЯ

8. Записать в радианной мере углы: 15°, $22^\circ 30'$, 51°, $157^\circ 30'$, 162°.

9. Записать в градусной мере углы, измеренные в радианах: $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{6\pi}{5}$; $\frac{10\pi}{5}$; 1,5; 2,50.

10. Найти угловую величину дуги в градусах, если ее радианная мера равна:

А

1) $\frac{\pi}{3}$; 2) 2; 3) $\frac{3\pi}{4}$.

Б

4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $\frac{\pi}{12}$; 7) 7π; 8) $\frac{5\pi}{2}$.

В

9) 0,5; 10) $0{,}75\pi$; 11) 1,882.

11. В какой четверти заканчивается угол:

А

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) 3; 3) 128°?

Б

4) 216°; 5) 7π; 6) 0,80?

В

7) $\frac{21\pi}{4}$; 8) 100; 9) –0,25?

12. Решить задачу:

А

1) Зубчатое колесо, которое имеет 56 зубцов, повернулось на 14 зубцов против часовой стрелки. Выразить в радианах угол поворота колеса.

2) Определить радианную меру дуги, длина и радиус которой равны 17 и 20 см, соответственно.

Б

3) Определить длину дуги окружности с радиусом 25 см, если:
а) радианная мера дуги равна 1,25 рад;
б) градусная мера дуги равна 144°.

В

4) Найти радианную меру угла сектора, длина дуги которого:
а) втрое меньше периметра сектора;
б) составляет половину периметра сектора.

§ 4. Тригонометрические функции числового аргумента

Прежде чем вводить определение тригонометрических функций числового аргумента, вспомним, что синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла не зависят от радиуса R

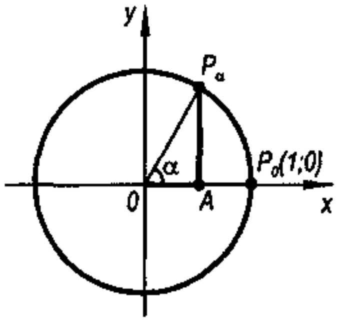

Рис. 24

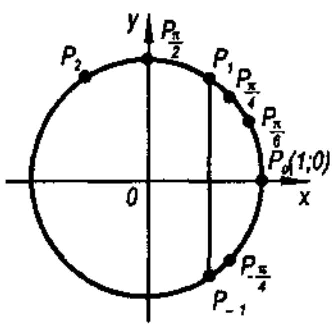

Рис. 25

окружности. Поэтому примем $R = 1$, а соответствующую окружность назовем единичной (рис. 24).

Выполним такое упражнение: построим на единичной окружности точки, на которые отображается начальная точка $P_0(1;\ 0)$ при повороте вокруг центра окружности на угол α радиан, если: а) $\alpha = 0$; б) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; в) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; г) $\alpha = -1$; д) $\alpha = 2$.

Р е ш е н и е . а) Числу 0 на единичной окружности (рис. 25) соответствует точка $P_0(1;\ 0)$ — начало отсчета.

б) Т. к. угол 90° равен $\frac{\pi}{2}$ рад, то, разделив на 3 угол $\frac{\pi}{2}$ рад, получим угол вращения $\frac{\pi}{6}$ рад, которому соответствует на окружности точка $P_{\frac{\pi}{6}}$, отсекающая $\frac{1}{3}$ часть дуги $P_0 P_{\frac{\pi}{2}}$.

в) Известно, что углы, градусная или радианная мера которых выражается отрицательным числом, откладывают от радиуса OP_0 по часовой стрелке; разделим прямой угол, т. е. угол $\frac{\pi}{2}$ рад, пополам и отложим угол $-\frac{\pi}{4}$ от радиуса OP_0 в IV четверти, получим точку $P_{-\frac{\pi}{4}}$.

г) Углу 1 рад соответствует дуга единичной окружности, длина которой равна радиусу $R = 1$; т. к. $\frac{\pi}{4} \approx \frac{3{,}14}{4} \approx 0{,}78$, а $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3{,}14}{2} \approx 1{,}57$, поэтому точка P_1 лежит выше точки $P_{\frac{\pi}{4}}$. Точка P_{-1} будет симметрична ей относительно оси Ox и расположена на единичной окружности в IV четверти.

д) Чтобы найти на единичной окружности точку P_2, достаточно отложить от начальной точки в направлении, противоположном движению часовой стрелки, две дуги P_0P_1 последовательно.

Решая это упражнение, замечаем, что каждому действительному числу α на единичной окружности соответствует точка P_α, положение которой зависит от числа α.

Каждой точке P_α на единичной окружности соответствуют определенные абсцисса и ордината, которые также зависят от α.

Итак, имеем зависимости между действительным числом α и абсциссой и ординатой соответствующей точки единичной окружности, на которую отображается начальная точка $P_0(1;\ 0)$ при повороте вокруг центра окружности на угол α рад. Эти зависимости получили название **тригонометрических функций числа, или тригонометрических функций числового аргумента.**

Поскольку $R = 1$, то определения тригонометрических функций как отношений ординаты и абсциссы к радиусу, которые были введены для произвольных углов α и R, упрощаются.

α P_α

$P_0(1;\ 0)$
α $\sin\alpha$

α P_α

$P_0(1;\ 0)$
α $\cos\alpha$

α $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

α $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}\alpha$

Итак, по определению,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Если каждому действительному числу x можно поставить в соответствие действительные числа $\sin x$ и $\cos x$, то будем считать, что на множестве $\boldsymbol{R}$ задано функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Поскольку $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ определен для всех x, кроме тех, при которых $\cos x = 0$, то каждому действительному числу x, кроме $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \boldsymbol{Z}$, соответствует единственное число $\operatorname{tg} x$ (значение y зависит от x), т. е. будем считать, что задана функция

$$y = \operatorname{tg} x, \text{ де } x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что на множестве $\boldsymbol{R}$ при $x \neq n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$ задана функция $y = \operatorname{ctg} x$.

Для построения графиков функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ и решения некоторых других задач целесообразно ввести понятия «линия тангенса» и «линия котангенса».

Проведем касательную t к единичной окружности в точке P_0 (1; 0) (рис. 26).

Для произвольного числа α, если $\cos\alpha \neq 0$, соответствующая точка $P_\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha)$ не лежит на оси Oy, а поэтому луч OP_α пересекает касательную в некоторой точке T_α с абсциссой, равной 1.

Для нахождения ординаты точки T_α воспользуемся подобием треугольников OAP_α и OP_0T_α.

Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{P_\alpha A}{OA} = \frac{T_\alpha P_0}{OP_0} = T_\alpha P_0 = \operatorname{tg}\alpha.$$

Таким образом, ордината точки пересечения прямой OP_α с прямой t равняется тангенсу угла α. Поэтому касательная t получила название **линии тангенса.**

Чтобы ввести понятие линии котангенса, проведем касательную q к единичной окружности в точке $P_{\frac{\pi}{2}}$ (рис. 27). Для произвольного числа α, если $\sin\alpha \neq 0$, соответствующая точка $P_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha)$ не лежит на оси Ox, и потому луч OP_α пересекает прямую q в некоторой точке Q_α с ординатой, равной 1. Найдем абсциссу этой точки.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через начало координат. Оно имеет вид $y = kx$, где $k = \operatorname{tg}\alpha$. Поскольку ордината точки Q_α равна 1, то, подставляя значение k и $y = 1$

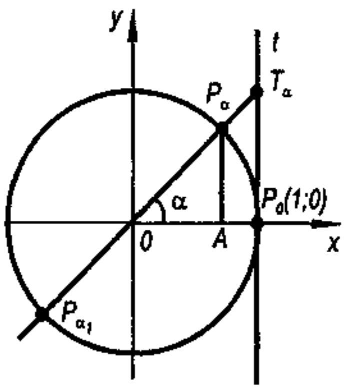

Рис. 26

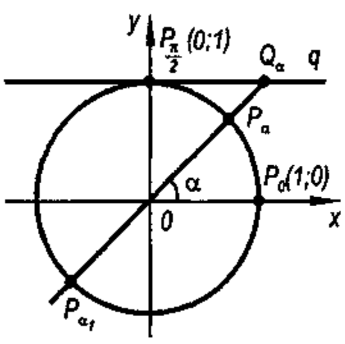

Рис. 27

в уравнение $y = kx$, получим равенство $1 = x\text{tg}\ \alpha$. Отсюда $x = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \text{ctg}\ \alpha$.

Таким образом, абсцисса точки пересечения прямой OP_α с прямой q равна котангенсу угла α. Поэтому касательная q получила название **линии котангенса**.

Поскольку каждому действительному числу α на единичной окружности соответствует определенная точка P_α, а этой точке отвечают определенные абсцисса $\cos\alpha$ и ордината $\sin\alpha$, то областью определения функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$ является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Абсцисса и ордината точки P_α единичной окружности изменяются от -1 до 1, поэтому областью значений этих функций является отрезок $[-1;\ 1]$.

Областью определения функции $y = \text{tg}\ x$ является множество всех чисел, для которых $\cos x \neq 0$, т. е. множество всех действительных чисел, кроме чисел $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, где n — произвольное целое число, т. е. $n \in \boldsymbol{Z}$.

Областью определения функции $y = \text{ctg}\ x$ является множество всех действительных чисел, для которых $\sin x \neq 0$, т. е. множество всех действительных чисел, кроме чисел $x = n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Область значений функций $y = \text{tg}\ x$ и $y = \text{ctg}\ x$ — множество всех действительных чисел. В самом деле, если α — произвольное действительное число, то ему соответствует на линии тангенса (см. рис. 26) точка $T_\alpha(1;\ y_0)$ такая, что $\text{tg}\ \angle T_\alpha Ox = y_0$, а на линии котангенса — точка $Q_\alpha(y_0;\ 1)$ такая, что $\text{ctg}\ \angle Q_\alpha Ox = y_0$ (см. рис. 27). Итак, функции $y = \text{tg}\ x$ и $y = \text{ctg}\ x$ принимают любые действительные значения y_0.

Пример 1. Найти значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа $\frac{\pi}{3}$.

Решение. Числу $\frac{\pi}{3}$ на единичной окружности соответствует точка $P_{\frac{\pi}{3}}$ (рис. 28). Чтобы найти $\sin\frac{\pi}{3}$ и $\cos\frac{\pi}{3}$, достаточно найти ординату и абсциссу точки $P_{\frac{\pi}{3}}$. В прямоугольном треугольнике $OAP_{\frac{\pi}{3}}$ $\angle OP_{\frac{\pi}{3}}A = \frac{\pi}{6}$ рад, или $\angle OP_{\frac{\pi}{3}}A = 30°$. Т. к. в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы, то $OA = \frac{1}{2}$. По теореме Пифагора, $P_{\frac{\pi}{3}}A = \sqrt{OP_{\frac{\pi}{3}}^2 - OA^2}$; $P_{\frac{\pi}{3}}A = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. По опреде-

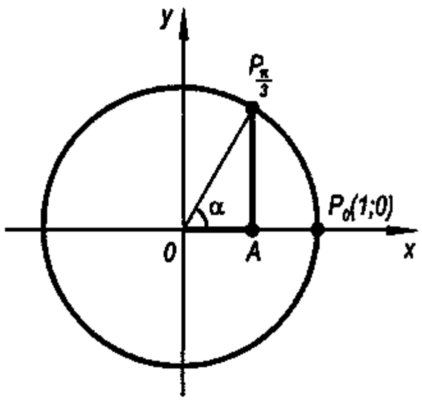

Рис. 28

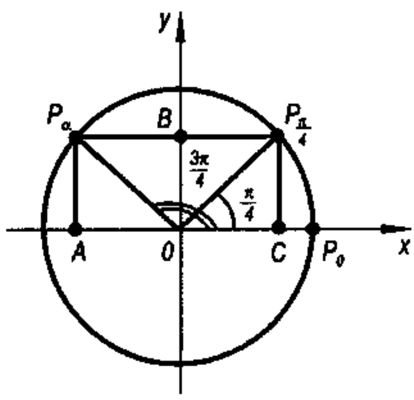

Рис. 29

лению, $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, поэтому $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$;

$\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Аналогично можно найти значения тригонометрических функций чисел $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, которые равны тригонометрическим функциям соответствующих углов в градусной и радианной мерах. Целесообразно помнить эти значения, как и значения функций для чисел (углов) 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, т. к. их часто используют при решении задач. Значения тригонометрических функций таких чисел (углов) систематизированы в таблице 1.

Таблица 1

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Не существует	0	Не существует

Пример 2. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Р е ш е н и е . Пусть точка P_α получена из точки $P_0(1;\ 0)$ при повороте на угол $\frac{3\pi}{4}$ (рис. 29). Точки A и B — проекции точки P_α на оси координат. В прямоугольном треугольнике $P_\alpha AO$ $\angle P_\alpha OA = \frac{\pi}{4}$, поэтому $\Delta P_\alpha AO$ — равнобедренный. Т. к. $\Delta P_\alpha AO = \Delta P_{\frac{\pi}{4}}CO$, то $P_\alpha A = P_{\frac{\pi}{4}}C = \sin\frac{\pi}{4}$, $AO = OC = \cos\frac{\pi}{4}$. Известно (см. табл. 1), что $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. По определению, $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ являются соответственно абсциссой и ординатой точки P_α. Поэтому $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, поскольку ординаты точек II четверти положительны, а абсциссы — отрицательны.

По определению, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1; \quad \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}} = -1.$$

Пример 3. Исследовать изменение $\cos\alpha$ при возрастании числа α от 0 до 2π.

Р е ш е н и е . По определению, $\cos\alpha$ является абсциссой точки P_α единичной окружности, в которую переходит начальная точка $P_0(1;\ 0)$ при повороте вокруг центра окружности на угол α рад.

Если α увеличивается от 0 до π (I и II четверти), то абсцисса уменьшается от 1 до -1. Таким образом, при возрастании аргумента от 0 до π функция косинус убывает от 1 до -1.

Если α увеличивается от π до 2π (III и IV четверти), абсцисса увеличивается от -1 до 1, т. е. при возрастании аргумента от π до 2π функция косинус возрастает от -1 до 1.

Аналогично исследуют изменение функции синус.

Характер изменения тангенса и котангенса легко исследовать, пользуясь линиями тангенса и котангенса.

Пример 4. Исследовать знаки синуса и котангенса в каждой из четырех координатных четвертей.

Р е ш е н и е . Можно воспользоваться единичной окружностью и определением синуса числа. Известно, что ординаты y точек в I и II четвертях положительны, поэтому синус чисел α, для которых соответствующая точка P_α принадлежит I и II четвертям, положительный.

Исследуя знак котангенса, можно воспользоваться линией котангенса (рис. 30). Если учесть, что значения котангенса

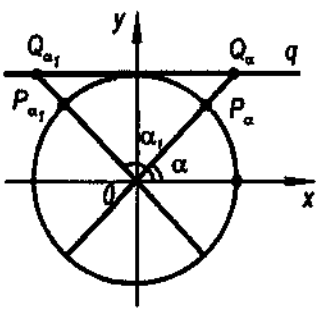

Рис. 30

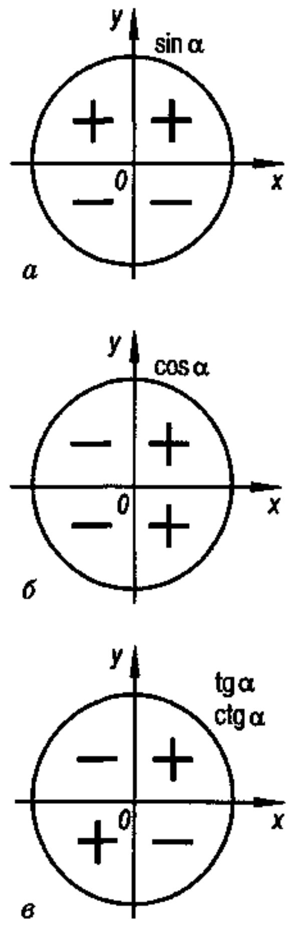

Рис. 31

положительны на луче, который расположен справа от оси Oy, и отрицательны на луче, который расположен слева от оси Oy, то для чисел α, соответствующая точка которых P_α принадлежит I и III четвертям, котангенс положительный, а для тех, где P_α принадлежит II и IV четвертям, — отрицательный.

Можно исследовать знак котангенса иначе: сначала исследовать знаки синуса и косинуса, а потом по определению нетрудно установить знаки котангенса.

Знаки тригонометрических функций в координатных четвертях схематично показаны на рисунке 31.

Пример 5. На единичной окружности построить такие углы α, для которых:

а) $\sin\alpha = -1$; б) $\cos\alpha = 0{,}5$;
в) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

Р е ш е н и е . а) Ординату, которая равна -1, имеют углы $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 32).

б) Отложим на оси Ox отрезок длиной 0,5 и через конец его проведем прямую, параллельную оси Oy. Она пересечет единичную окружность в точках $P_{\frac{\pi}{3}}$ и $P_{-\frac{\pi}{3}}$. Этим двум точкам соответствуют не только углы $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ и $\alpha_2 = -\frac{\pi}{3}$, но и все углы, радианная мера которых равна $\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

в) На единичной окружности построим линию тангенса и на ней от точки P_0 отложим отрезок P_0T длиной 1,5 (рис. 33). Через конец отрезка проведем прямую $T_{1,5}O$, которая

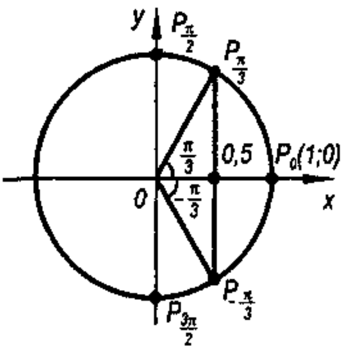

Рис. 32

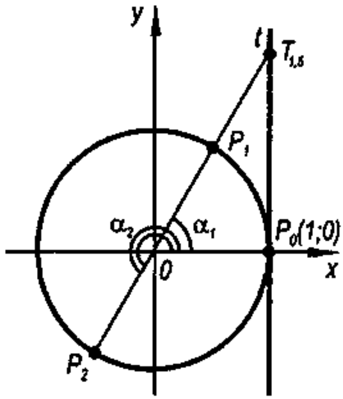

Рис. 33

пересечет окружность в двух точках P_1 и P_2. Искомыми являются углы $P_0OP_1 = \alpha_1$ и $P_0OP_2 = \alpha_2$, а также все углы $\alpha_1 + 2n\pi$ и $\alpha_2 + + 2n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Т. к. $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$, то $\alpha_2 + 2n\pi = \alpha_1 + \pi + + 2n\pi = \alpha_1 + (2n + 1)\pi$.

Две формулы $\alpha_1 + 2n\pi$ и $\alpha_1 + (2n + 1)\pi$ можно объединить в одну $\alpha_1 + k\pi$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Итак, искомыми являются углы вида $\alpha_1 + k\pi$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

г) На линии котангенса влево от оси Oy отложим отрезок $P_{\frac{\pi}{2}}C$ длиной 2. Через конец C проведем прямую CO, пересекающую окружность в двух точках P_1 и P_2. Искомыми являются углы $P_0OP_1 = \alpha_1$ и $P_0OP_2 = \alpha_2$, а также все углы $\alpha_1 + k\pi$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Сформулировать определения синуса и косинуса произвольного числа.

2. Как определяются тангенс и котангенс числового аргумента? Какова геометрическая интерпретация их на единичной окружности?

3. Назвать числовые значения тригонометрических функций чисел $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.

4. Исследовать изменение $\cos\alpha$ при возрастании числа α от 0 до 2π.

5. Исследовать изменение $\sin\alpha$ при возрастании числа α от 0 до 2π.

6. Как изменяются $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ при возрастании числа α от 0 до 2π?

7. Назвать знаки тригонометрических функций в каждой из координатных четвертей.

УПРАЖНЕНИЯ

13. Построить на единичной окружности точки P_α, на которые отображается начальная точка $P_0(1;\ 0)$ при повороте окружности вокруг центра на α рад, если:

1) $\alpha = \frac{\pi}{12}$; 2) $\alpha = 2{,}5$; 3) $\alpha = 2$; 4) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

14. Доказать, что

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

15. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

16. Обосновать знаки синуса в каждой из четырех координатных четвертей.

17. Исследовать характер изменений $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ при возрастании числа α от 0 до 2π.

18. На единичной окружности построить угол α такой, что:

1) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = -2$; 3) $\cos\alpha = -0{,}5$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}5$.

19. Определить знаки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

1) $\alpha = 0{,}3$; 2) $\alpha = \frac{12}{7}\pi$; 3) $\alpha = 2$; 4) $\alpha = -\frac{13\pi}{6}$.

20. Возможно ли равенство:

1) $\sin x = \frac{1}{5}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{3}$; 3) $\cos x = 1{,}2$;

4) $\operatorname{tg} x = 3$; 5) $\frac{1}{\sin x} = 0{,}9$; 6) $\frac{1}{\cos x} = -1{,}5$?

21. Что больше:

1) $\sin 1$ или $\sin 1{,}5$; 2) $\cos 2$ или $\cos 2{,}1$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$ или $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$ или $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3{,}2}$?

22. Вычислить:

1) $3\cos\pi - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$;

2) $2\sin\frac{\pi}{3} - \sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}$;

3) $2\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$;

4) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}$.

23. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $2\cos x$; 2) $2\sin x - 3$; 3) $3 - \cos^2 x$;

4) $-5\sin x$; 5) $5\cos t + 1$; 6) $\frac{1}{2+\cos x}$;

7) $3 + 2\sin x$; 8) $2 + 3\sin^2 x$; 9) $\frac{1}{3-\sin x}$.

Периодичность тригонометрических функций

К понятию периодической функции приводят периодические процессы, у которых значения определенных переменных повторяются. Примерами таких процессов являются движение коленчатого вала и поршня в двигателях внутреннего сгорания, разные вращательные движения и др.

На рисунке 34 изображено простое устройство, которое преобразует вращательное движение в прямолинейное. Колесо, которое вращается, насажено на ось и соединено с помощью «пальца» P с рамкой R. Во время вращения колеса «палец» P совершает вращательное движение, захватывает за собой рамку R, которая двигается вдоль боковых направляющих станин, и совершает прямолинейное периодическое движение (если колесо вращается равномерно). Если обозначить $OP = r$, а точку касания рамки со станинами — P_1, то путь O_1P_1 конца рамки будет изменяться в зависимости от изменения угла α, который образует радиус окружности с горизонтальным диаметром. Поскольку $O_1P_1 = AP = r\sin\alpha$, то, обозначив O_1P_1 через y, получим $y = r\sin\alpha$, т. е. периодическую функцию. Через каждый оборот колеса (через 2π) положение точки P повторяется. Поэтому наименьший положительный период функции $y = r\sin\alpha$ равен 2π.

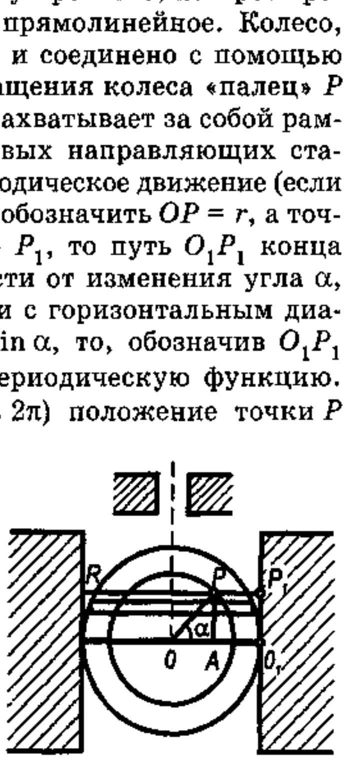

Рис. 34

$y = f(x)$

$T \neq 0$ x

$x + T$ $x - T$

$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$

Нетрудно доказать, что когда T период функции $y = f(x)$, то все числа вида nT, где $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$, также являются периодами функции.

Действительно, применяя несколько раз определение периодической функции, получим $f(x + 3T) = f((x + 2T) + T) = f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x)$.

Используя определения синуса и косинуса числового аргумента и учитывая их геометрическую интерпретацию на единичной окружности, имеем:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x,$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Произвольное число вида $2n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$, является периодом синуса и косинуса.

Используя линии тангенса и котангенса, нетрудно сделать вывод, что $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$.

Произвольное число вида $n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$, является периодом тангенса и котангенса.

Докажем, что наименьшим положительным периодом синуса и косинуса является число 2π, а тангенса и котангенса — число π.

Доказательство выполним методом от противного.

1) Выше было показано, что число 2π является периодом синуса. Допустим, что существует положительное число $l < 2\pi$ такое, что $\sin(x + l) = \sin x$. Пусть $x = \frac{\pi}{2}$, тогда $\sin\left(\frac{\pi}{2} + l\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Но синус может быть равным 1 только в точке $P_{\frac{\pi}{2}}$ (рис. 35), которая соответствует на единичной окружности числам $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, $\frac{\pi}{2} + l = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, откуда $l = 2n\pi$. Однако, по предположению, $0 < l < 2\pi$, т. е. $0 < 2n\pi < 2\pi$. Разделив все части двойного неравенства на 2π,

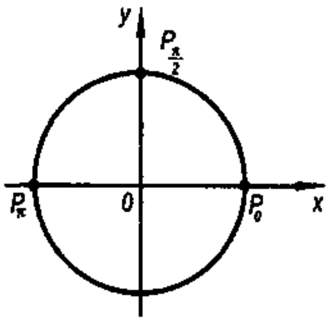

Рис. 35

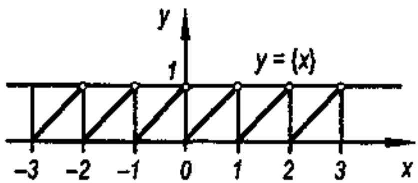

Рис. 36

получим $0 < n < 1$, что противоречит условию, т. к. $n \in \boldsymbol{Z}$, а между 0 и 1 нет ни одного целого числа.

Итак, предположение неправильное, 2π — наименьший положительный период синуса.

2) Известно, что число π является периодом тангенса. Допустим, что существует положительное число $0 < l < \pi$ и $\operatorname{tg}(x + l) = \operatorname{tg} x$. Пусть $x = 0$, тогда $\operatorname{tg}(0 + l) = \operatorname{tg} 0 = 0$. Но тангенс равен нулю только в двух точках P_0 и P_1 единичной окружности, которые соответствуют числам вида $n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому $l = n\pi$. По предположению, $0 < l < \pi$, т. е. $0 < n\pi < \pi$. Отсюда $0 < n < 1$, что противоречит условию.

Итак, предположение неправильное, π — наименьший положительный период тангенса.

Самостоятельно докажите, что наименьшим положительным периодом косинуса является 2π, а котангенса — число π.

Не следует думать, что периодическими являются только тригонометрические функции. Примером периодической функции является функция $y = \{x\}$ (y равен дробной части x) (рис. 36). Наименьшим положительным периодом этой функции является число 1.

Линейная функция $y = kx + b$ — периодическая при $k = 0$. Для нее периодом является любое действительное число $T \neq 0$, т. к. $f(x + T) = f(x) = b$. Наименьшего положительного периода эта функция не имеет.

По наименьшему положительному периоду тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ можно найти наименьший положительный период сложной тригонометрической функции, промежуточным аргументом которой является, в частности, линейная функция.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

Пример 1. Найти наименьший положительный период функции $y = \sin(kx + b)$, где k, b — числа.

Решение. Пусть $T > 0$ — искомый период. По определению периодической функции, $\sin(k(x + T) + b) = \sin(kx + b)$, или $\sin(kx + kT + b) = \sin(kx + b)$.

Обозначим $x_1 = kx + b$ и подставим значение x_1 вместо $kx + b$ в последнее равенство. Получим $\sin(x_1 + kT) = \sin x_1$.

Поскольку наименьшим положительным периодом синуса является 2π, то $|k| \cdot T = 2\pi$, отсюда $T = \frac{2\pi}{|k|}$.

Пользуясь полученным результатом, можно утверждать, что наименьшим положительным периодом функции $y = \sin 2x$

является число $\frac{2\pi}{2} = \pi$, функции $y = \sin \frac{1}{2} x$ — число $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, функции $y = \sin kx$ — число $\frac{2\pi}{|k|}$.

Опираясь на свойство периодичности тригонометрических функций, можно находить значения функций любого аргумента через значение функций аргумента $0 < x < 2\pi$ для синуса и косинуса и аргумента $0 < x < \pi$ — для тангенса и котангенса.

Период функции, которая является суммой непрерывных и периодических функций, равен наименьшему общему кратному периодов слагаемых, если он существует.

Пример 2. Найти период функции:

1) $y = \sin 2x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 2) $y = \cos\frac{x}{3} + \operatorname{tg}\frac{x}{5}$;

3) $y = \sin\frac{3x}{4} + 5\cos\frac{2x}{3}$; 4) $y = 2\operatorname{ctg} 3x - 4\operatorname{tg} 2x$.

Решение. 1) Первое слагаемое можно записать в виде $\sin 2x = \sin (2x + 2\pi) = \sin (2(x + \pi)$, поэтому его период равен π: $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Второе слагаемое можно записать в виде $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \operatorname{tg} \frac{x+2\pi}{2}$, поэтому его период равен 2π: $T_2 = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$. Периодом данной функции будет наименьшее общее кратное (НОК) периодов слагаемых, т. е. $T = 2\pi$.

2) Первое слагаемое можно записать в виде $\cos\frac{x}{3} = \cos\left(\frac{x}{3}+2\pi\right) = \cos\frac{x+6\pi}{3}$, поэтому его период равен 6π: $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

Второе слагаемое можно записать в виде $\operatorname{tg}\frac{x}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{5}+\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{x+5\pi}{5}$, его период равен 5π : $T_2 = \frac{\pi}{\frac{1}{5}} = 5\pi$. Период T данной функции равен НОК $(6\pi; 5\pi)$, т. е. 30π.

3) Первое слагаемое можно записать в виде $\sin\frac{3x}{4} = \sin\left(\frac{3x}{4} + 2\pi\right) = \sin\frac{3}{4}\left(x + \frac{8\pi}{3}\right)$, поэтому его период $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$. Второе слагаемое можно записать в виде $\cos\frac{2x}{3} = \cos\left(\frac{2x}{3}+2\pi\right) = \cos\frac{2}{3}(x + 3\pi)$, поэтому его период $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$. Период T данной функции равен НОК $\left(\frac{8\pi}{3}; 3\pi\right)$, т. е. 24π.

4) Первое слагаемое запишем в виде $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} 3(x + \pi)$, поэтому его период $T_1 = \frac{\pi}{3}$. Второе слагаемое запишем в виде $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2(x + \pi)$, поэтому его период $T_2 = \frac{\pi}{2}$. Период T данной функции равен НОК $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. π.

Пример 3. Привести к одноименной функции острого угла:

1) $\cos 1827^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 978^\circ$; 3) $\sin(-800^\circ)$; 4) $\operatorname{ctg} 1305^\circ$;

5) $\sin\frac{26\pi}{5}$; 6) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$; 7) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{35\pi}{9}\right)$.

Решение.

1) $\cos 1827^\circ = \cos(360^\circ \cdot 5 + 27^\circ) = \cos 27^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 978^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ \cdot 5 + 78^\circ) = \operatorname{tg} 78^\circ$;

3) $\sin(-800^\circ) = \sin(360^\circ \cdot (-2) - 80^\circ) = \sin(-80^\circ)$;

4) $\operatorname{ctg} 1305^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ \cdot 7 + 45^\circ) = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$;

5) $\sin\frac{26\pi}{5} = \sin\left(5\pi + \frac{1}{5}\pi\right) = \sin\left(4\pi + \left(\pi + \frac{1}{5}\pi\right)\right) = \sin\left(\pi + \frac{1}{5}\pi\right) = -\sin\frac{1}{5}\pi$;

6) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{35\pi}{9}\right) = \operatorname{tg}\left(\pi(-4) + \frac{1}{9}\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{1}{9}\pi$.

Пример 4. Вычислить значение тригонометрической функции:

1) $\cos 1125^\circ$; 2) $\cos(-315^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{17}{3}\pi\right)$; 4) $\cos\frac{13\pi}{6}$.

Решение.

1) $\cos 1125^\circ = \cos(360^\circ \cdot 3 + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\sin(-315^\circ) = \sin(-360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{17}{3}\pi\right) = \operatorname{tg}\left(\pi(-6) + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

4) $\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какая функция называется периодической? Привести примеры периодических функций.

2. Доказать, что наименьшим положительным периодом синуса и косинуса является число 2π.

3. Доказать, что наименьшим положительным периодом тангенса и котангенса является число π.

УПРАЖНЕНИЯ

24. С помощью калькулятора (или таблиц) найти:

1) $\sin 29^\circ$; 2) $\sin 0{,}48$; 3) $\mathrm{tg}\, 1{,}5$; 4) $-\mathrm{ctg}\, 2{,}5$; 5) $\mathrm{tg}\, \frac{\pi}{12}$;
6) $\sin 48^\circ 32'$; 7) $-\cos 0{,}7$; 8) $\mathrm{ctg}\, 100^\circ 42'$.

25. Привести к одноименной функции острого угла:

1) $\sin 425^\circ$; 2) $\mathrm{tg}\, \frac{14\pi}{6}$; 3) $\cos(-1750^\circ)$; 4) $\mathrm{ctg}\, \frac{8\pi}{3}$;

5) $\sin \frac{43}{3}\pi$; 6) $\cos(-1125^\circ)$; 7) $\mathrm{ctg}\,(-12{,}3\pi)$; 8) $\mathrm{tg}\, 600^\circ$.

26. Доказать, что наименьшим положительным периодом функции $y = \cos(kx + b)$ является число $T = \frac{2\pi}{|k|}$, а функции $y = \mathrm{tg}\,(kx + b)$ — число $T = \frac{\pi}{|k|}$.

27. Какие из данных функций периодические? Найти для периодических функций наименьший положительный период:

1) $y = \mathrm{tg}\, 3x$; 2) $y = 5$; 3) $y = \cos \frac{x}{3}$; 4) $y = \{3x\}$; 5) $y = [x]$.

28. Вычислить: $$\frac{\mathrm{tg}\left(-\frac{17}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)}{\sin \frac{26\pi}{6}}.$$

29. Упростить:

1) $\dfrac{\sin^2(3\alpha+6\pi)}{\mathrm{tg}^2(2\pi+3\alpha)+\mathrm{tg}(5\pi+3\alpha)\,\mathrm{ctg}(3\alpha+\pi)}$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha+6\pi)\,\mathrm{ctg}(5\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)\,\mathrm{ctg}(5\pi+\alpha)}$.

Построение графиков тригонометрических функций

График каждой из тригонометрических функций достаточно построить на промежутке, соответствующем наименьшему положительному периоду, а затем можно продолжить его построение на всю область определения. При построении графиков по точкам воспользуемся геометрической интерпретацией каждой из тригонометрических функций на единичной окружности.

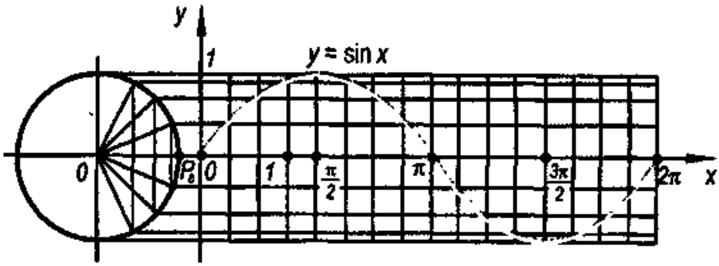

Рис. 37

График функции $y = \sin x$ построим на отрезке $[0; 2\pi]$. Поскольку синус числа α — это ордината точки единичной окружности, в которую переходит точка $P_0(1; 0)$ при повороте вокруг центра на α рад, то построим систему координат. Обозначим на оси Ox отрезок $[0; 2\pi]$, длина которого приближенно равна $2\pi \approx 2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28$ (рис. 37). Построим также вне этого отрезка окружность с центром на оси Ox и радиусом, равным 1. Длина окружности также приближенно равна $2\pi \approx 6{,}28$. Разделим отрезок $[0; 2\pi]$ и окружность, начиная от точки P_0, на 16 равных частей. Через каждую точку деления окружности проведем прямые, параллельные оси Ox. Из каждой точки деления окружности P_α проведем перпендикуляры к оси Ox, длины которых равны ординате, а значит, синусу угла, образованного радиусом OP_α и осью Ox и измеренного в радианах. Каждая из этих ординат соответствует абсциссам α, обозначенным точками деления отрезка $[0; 2\pi]$ на оси Ox. Проведя прямые, параллельные оси Oy в каждой точке деления этого отрезка, до пересечения с соответствующей параллельной прямой, получим в пересечении точки графика функции $y = \sin x$. Проведенная через эти точки сплошная кривая называется **синусоидой**.

Функция $y = \sin x$ периодическая с периодом $2n\pi$, где $n \in Z$, т. е. $y = \sin(x + 2n\pi)$, поэтому для продолжения графика за пределы отрезка $[0; 2\pi]$ достаточно выполнить построение графиков функций вида

$y = \sin(x + 2\pi)$, $y = \sin(x - 2\pi)$, $y = \sin(x + 4\pi)$,

$y = \sin(x - 4\pi)$, $y = \sin(x + 6\pi)$, $y = \sin(x - 6\pi)$, ...,

параллельно перенося график функции $y = \sin x$ на 2π, 4π, 6π, ... единиц влево и вправо (рис. 38).

График функции $y = \cos x$ построим, воспользовавшись геометрическим преобразованием известного графика. Известно, что $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (докажите самостоятельно формулу $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$), т. е. график функции $y = \cos x$ можно по-

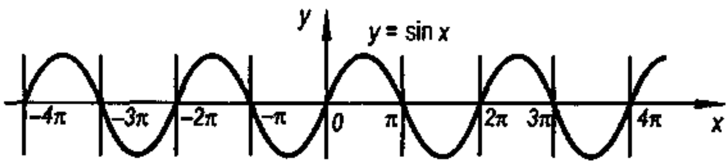

Рис. 38

лучить из графика функции $y = \sin x$ параллельным переносом его влево вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{2}$ единиц (рис. 39).

График функции $y = \operatorname{tg} x$ построим с помощью линии тангенса на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, длина которого равна периоду π этой функции.

Построим систему координат и выделим на оси Ox промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Вне его построим единичную окружность с центром на оси Ox и линию тангенса. Разделим промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и правую полуокружность на 8 равных частей (рис. 40). Через центр окружности и точки деления ее проведем прямые до пересечения с линией тангенса. Образованные точки T_α пересечения определяют отрезки на линии тангенса, длины которых равны тангенсу соответствующего угла поворота, измеренного в радианах. Числовые значения этих углов, обозначенные на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ оси Ox, равны $-\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{8}$, 0, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$.

Через точки T_α на линии тангенса проведем прямые, параллельные оси Ox, а через точки деления промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ — параллельные оси Oy. Попарные пересечения этих параллельных прямых определяют точки, которые принадлежат графику $y = \operatorname{tg} x$. Проводя плавную кривую через эти точки, получим график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Чтобы построить график за его пределами, достаточно воспользоваться периодичностью функции тангенс, т. е. тождеством $\operatorname{tg}(x + n\pi) =$

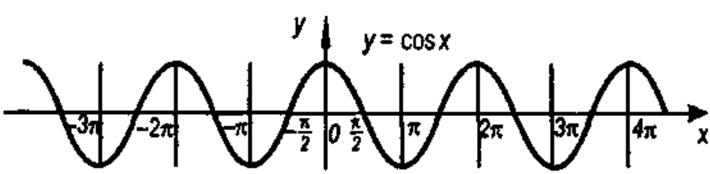

Рис. 39

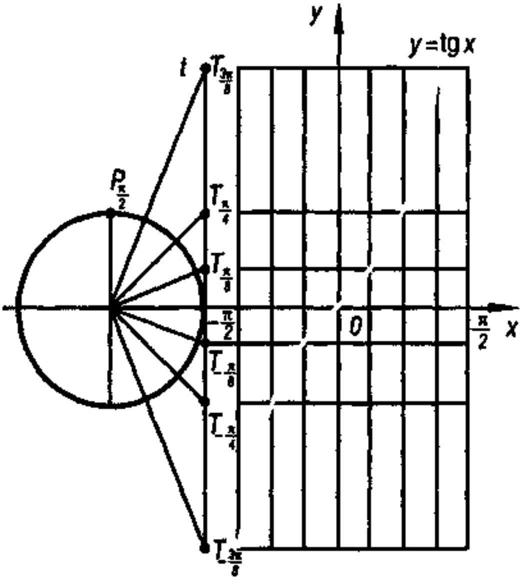

Рис. 40

$=$ tg x. Таким образом, следует выполнить построение функций вида $y=$ tg $(x+\pi)$, $y=$ tg $(x-\pi)$, $y=$ tg $(x+2\pi)$, $y=$ tg $(x-2\pi)$, $y=$ tg $(x+3\pi)$, $y=$ tg $(x-3\pi)$, ... параллельным переносом графика функции $y=$ tg x на π, 2π, 3π, ... единиц влево и вправо (рис. 41). График функции $y=$ tg x называют **тангенсоидой.**

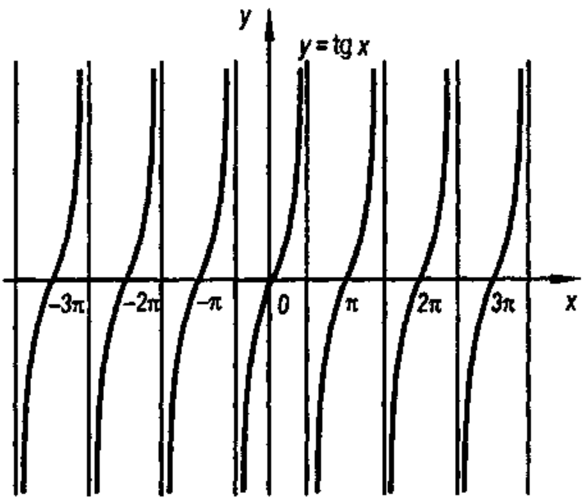

Рис. 41

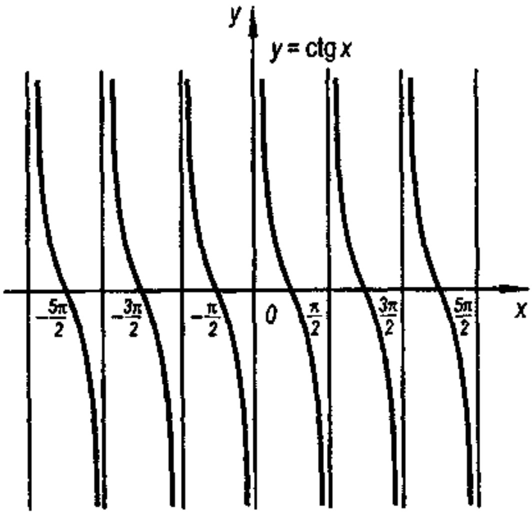

Рис. 42

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ легко получить, воспользовавшись формулой $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ и двумя геометрическими преобразованиями — параллельным переносом тангенсоиды на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево и преобразованием симметрии образованного графика относительно оси Ox (рис. 42). Докажите самостоятельно формулу $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x$, пользуясь единичной окружностью и линиями тангенса и котангенса.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

Пример 1. Пользуясь единичной окружностью и графиком функции $y = \sin x$, ответить на вопросы:

1) как изменяются значения функции $y = \sin x$ в каждой координатной четверти при изменении аргумента от 0 до 2π?

2) какие знаки имеют значения функции $y = \sin x$ в каждой четверти?

3) при каких значениях аргумента функция равна нулю на отрезке $[0; 2\pi]$?

4) каково значение $y = \sin x$, если x равен: $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$?

5) назвать числа из промежутка $[0; 2\pi]$, синус которых равен:

$$\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ 1;\ -1;\ \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6) какие наибольшие и наименьшие значения принимает функция $y = \sin x$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$; при каких значениях аргумента она приобретает эти значения?

Решение. 1) Т. к. синус числа α — это ордината точки единичной окружности, то при увеличении числа α (а значит, и угла поворота) от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (I четверть) ордината ($\sin\alpha$) увеличивается от 0 до 1. При увеличении аргумента от $\frac{\pi}{2}$ до π (II четверть) синус уменьшается от 1 до 0. При увеличении аргумента от π до $\frac{3\pi}{2}$ (III четверть) синус продолжает уменьшаться от 0 до -1. При увеличении аргумента от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π (IV четверть) значение функции синус увеличивается от -1 до 0. Анализ графика функции $y = \sin x$ подтверждает такой характер изменения значений этой функции: в I четверти синусоида поднимается вверх, в II и III четвертях опускается вниз, в IV четверти снова поднимается вверх.

2) Знаки функции синус в координатных четвертях определяет знак ординаты точек единичной окружности: в I и II четвертях синус положительный, в III и IV — отрицательный.

3) Значение синуса равно нулю при тех значениях аргумента, при которых ординаты точек единичной окружности равны нулю, т. е., если $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

4) Пользуясь определением синуса и единичной окружностью или графиком функции $y = \sin x$, сделаем вывод,что

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,\ \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1,\ \sin\frac{5\pi}{2} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

5) Это числа $\frac{\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6};\ 0;\ \frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}$.

6) Анализ изменения значений функции $y = \sin x$ на единичной окружности и по графику показывает, что наибольшего значения 1 функция принимает при значении аргумента, равном $\frac{\pi}{2}$, а наименьшего -1 — при значении аргумента, равном $\frac{3\pi}{2}$.

Пример 2. Построить графики функций $y = \sin 2x$, $y = \sin\frac{1}{2}x$.

Решение. Используем геометрическое преобразование известного графика функции $y = \sin x$. Если $\sin x = f(x)$, то $\sin 2x = f(kx)$. Известно, что график функции $y = f(kx)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$, сжимая его к оси Oy, если $k > 1$, и растягивая от оси Oy, если $0 < k < 1$.

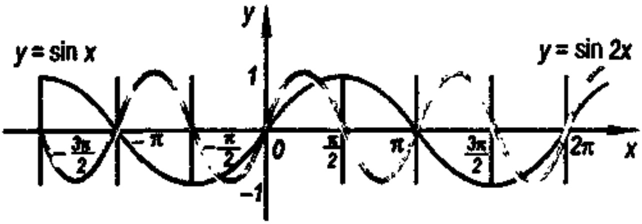

Рис. 43

Итак, график функции $y = \sin 2x$ можно получить, сжимая в 2 раза (рис. 43), а график $y = \sin \frac{1}{2} x$ — растягивая в 2 раза (рис. 44) известный график функции $y = \sin x$.

Пример 3. Построить график функции $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Р е ш е н и е . Преобразуем выражение данной функции так, чтобы перед аргументом в скобках остался коэффициент, равный 1, т. е. представим его в виде $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Это позволит позднее построить график функции $y = f(x - a)$, где $a > 0$, параллельным переносом вдоль оси Ox уже известного графика функции.

Последовательность построения искомого графика может быть такой (рис. 45):

строим известный график функции $y = \cos x$;

строим график функции $y = \cos 2x$, сжимая график функции $y = \cos x$ в 2 раза к оси Oy;

строим график $y = 3\cos 2x$, растягивая в 3 раза от оси Ox график функции $y = \cos 2x$;

строим искомый график $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ параллельным переносом графика $y = 3\cos 2x$ вправо вдоль оси Ox на расстояние $\frac{\pi}{4}$.

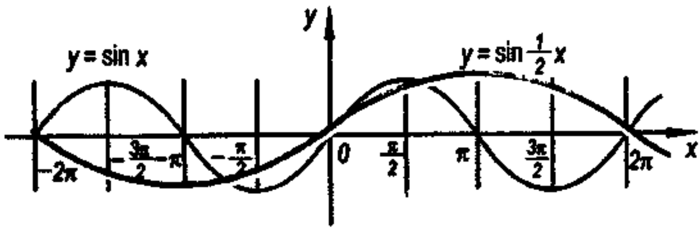

Рис. 44

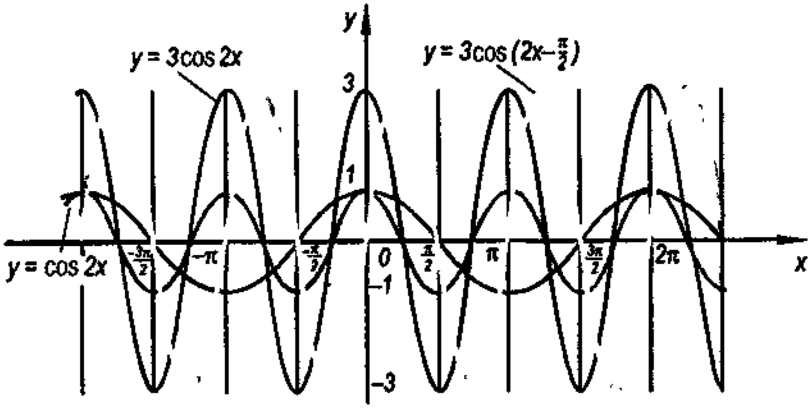

Рис. 45

1. Как построить графики тригонометрических функций числа? Построить графики функций $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$.

2. Построить графики функций $y = \cos x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

3. Как построить график функции $y = \sin \frac{1}{2} x$?

4. Как построить график функции $y = \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$?

5. Как построить график функции $y = A\sin (kx + \varphi)$?

УПРАЖНЕНИЯ

30. Построить график функции:

А

1) $y = \cos \frac{1}{2} x$; 2) $y = |\cos x|$;

3) $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$; 4) $y = -\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$.

Б

5) $y = \frac{1}{2} \sin 2x$; 6) $y = 2\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$;

7) $y = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; 8) $y = \left|2\sin\frac{x}{2}\right|$.

9) $y = 2\sin|x|$, 10) $y = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$;

11) $y = |\mathrm{tg}\ x|$; 12) $y = -\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$.

§ 7. Свойства тригонометрических функций

Функция $y = \sin x$. 1) Т. к. синус существует для любого действительного числа и как ордината точки единичной окружности (см. рис. 22) изменяется на отрезке от -1 до 1, то областью определения этой функции является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, а областью значений — отрезок $[-1; 1]$.

2) График функции симметричный относительно начала координат (см. рис. 38), т. е. функция $y = \sin x$ — нечетная. Докажем это, пользуясь единичной окружностью.

Поскольку областью определения функции $y = \sin x$ является множество $\boldsymbol{R}$, симметричное относительно начала (нуля) отсчета, то остается доказать, что $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

Обозначим на единичной окружности точки P_α и $P_{-\alpha}$, которые соответствуют числам α и $-\alpha$ (рис. 46). Так как прямоугольные треугольники $P_\alpha OA$ и $P_{-\alpha}OA$ равны, потому что гипотенузы OP_α и $OP_{-\alpha}$ равны как радиусы окружности, а катет OA — общий, то абсциссы точек P_α и $P_{-\alpha}$ равны, а ординаты — противоположные числа. Поэтому $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

3) Функция $y = \sin x$ периодическая с периодом $2n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$. Действительно, определение синуса числа как ординаты точки единичной окружности и график функции свидетельствуют о том, что каждое свое значение функция повторяет через полный оборот. Выше уже было доказано, что наименьшим положительным периодом этой функции является число 2π.

4) Функция принимает значения, равные 0 (нули функции), если $x = k\pi$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, т. к. ординаты точек единичной окружности преобразуются в ноль на отрезке $[0; 2\pi]$ в двух точках $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi$, а функция периодическая. Числа $0 + 2n\pi = 2n\pi$, $\pi + 2n\pi = (2n + 1)\pi$ образуют множество $k\pi$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

5) Промежутки возрастания функции — отрезки $\left[-\frac{\pi}{2}+2n\pi;\ \frac{\pi}{2}+2n\pi\right]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Поскольку $y=\sin x$ — функция периодическая, то достаточно доказать ее возрастание на одном из указанных отрезков, например на $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Воспользуемся единичной окружностью. Точка P_α, двигаясь на единичной окружности в положительном направлении от точки P_0 до точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, все время поднимается вверх и перемещается влево (рис. 46). Это означает, что ордината точки P_α возрастает от 0 до 1.

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$ во время движения точки P_α на единичной окружности в положительном направлении ордината возрастает от -1 до 0.

Аналогично можно показать, что синус убывает на отрезках $\left[\frac{\pi}{2}+2n\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2n\pi\right]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Обоснуйте это самостоятельно.

Позже, после изучения тождества вычитания синусов, свойство возрастания и убывания синуса с помощью определений возрастающей и убывающей функций будет доказано аналитически.

6) Промежутками, где синус положительный, являются $(2n\pi;\ \pi+2n\pi)$, т. к. на отрезке $[0;\ 2\pi]$, длина которого равна наименьшему положительному периоду 2π, функция положительна на промежутке $(0;\ \pi)$. Синус отрицательный на промежутках $(\pi+2n\pi;\ 2\pi+2n\pi)$, т. к. на отрезке $[0;\ 2\pi]$ он отрицательный на промежутке $(\pi;\ 2\pi)$.

Учитывая периодичность функции, получим все возможные промежутки знакопостоянства.

7) Синус достигает наибольшего значения, равного 1, в точках $\frac{\pi}{2}+2n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, а наименьшего значения, которое равно -1, — в точках $\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, т. к. на отрезке $[0;\ 2\pi]$ ордината точки

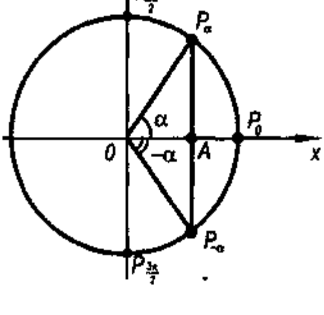

Рис. 46

единичной окружности равна 1, если $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и -1, если $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Функция $y = \cos x$. 1) Областью определения функции является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, а областью значений является отрезок $[-1; 1]$, т. к. косинус существует для любого действительного числа и как абсцисса точки единичной окружности (см. рис. 24) изменяется на отрезке $[-1; 1]$.

2) График функции симметричный относительно оси Oy (см. рис. 39). Таким образом, функция четная. Докажем это для отрезка $[0; 2\pi]$, пользуясь единичной окружностью.

Поскольку областью определения функции $y = \cos x$ является множество $\boldsymbol{R}$, симметричное относительно начала (нуля) отсчета, то остается доказать, что $\cos(-x) = \cos x$.

Обозначим на единичной окружности точки P_α и $P_{-\alpha}$, соответствующие числам α и $-\alpha$ (см. рис. 46). Выше было показано, что абсциссы этих точек равны, поэтому $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

3) Функция $y = \cos x$ периодическая с периодом $2n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, т. к. определение косинуса числа как абсциссы точки единичной окружности (см. рис. 24) и график функции (см. рис. 39) свидетельствуют о том, что каждое свое значение функция повторяет через полный оборот. Раньше было доказано, что наименьшим положительным периодом функции является число 2π.

4) Функция принимает значения, равные 0 (нули функции), если $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, т. к. абсциссы точек единичной окружности на отрезке $[0; 2\pi]$ равны 0 в двух точках $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$. Прибавив к этим числам период $2n\pi$, получим два множества чисел, которые вместе образуют множество $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

5) Промежутки возрастания функции — отрезки $[-\pi + 2n\pi; 2n\pi]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Т. к. функция $y = \cos x$ периодическая, то достаточно доказать ее возрастание на одном из указанных промежутков, например на отрезке $[\pi; 2\pi]$.

Отрезку $[\pi; 2\pi]$ соответствуют на единичной окружности III и IV четверти. Когда точка P_α двигается на единичной окружности в положительном направлении по дугам, соответствующим этим четвертям, от точки P_π до $P_{2\pi}$ абсцисса ее возрастает от -1 до $+1$.

Аналогично можно показать, что косинус убывает на отрезках $[2n\pi; \pi + 2n\pi]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Обоснуйте это самостоятельно.

Позже, после изучения формулы вычитания косинусов, свойство возрастания и убывания функции $y = \cos x$ будет доказано аналитически.

6) Промежутками, где косинус положительный, являются $\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi; \frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$, а отрицательный — на промежутках $\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi; \frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Действительно, в I и IV четвертях, т. е. на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, косинус принимает положительные значения, а во II и III четвертях, т. е. на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, — отрицательные. Учитывая периодичность функции, получим все возможные промежутки знакопостоянства.

7) Косинус достигает наибольшего значения, равного 1, в точках $x = 2n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, а наименьшего значения, равного -1, — в точках $x = \pi + 2n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$. 1) Областью определения функции является множество всех действительных чисел, кроме тех, косинус которых равен 0, т. е. чисел $\frac{\pi}{2} + n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; областью значений является множество $\boldsymbol{R}$.

2) График тангенса (см. рис. 41) симметричный относительно начала координат, т. е. функция нечетная. Доказать это утверждение можно пользуясь нечетностью синуса и четностью косинуса.

Действительно, область определения тангенса — множество, симметричное относительно нуля — начала отсчета, и

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

3) Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая, с периодом $n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, т. к. каждое свое значение как длину отрезка линии тангенса она повторяет через половину оборота (см. рис. 26). Выше было доказано, что наименьшим положительным периодом тангенса является число π.

4) Функция принимает значения, равные 0 (нули функции), если $x = n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, т. к. тангенс равен нулю в тех точках, где синус равен нулю, а косинус не равен нулю. Об этом свидетельствуют интерпретация на единичной окружности и график функции.

5) Промежутки возрастания функции $\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Учитывая периодичность функции, достаточно доказать возрастание на одном из промежутков, например на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Построенный график (см. рис. 41) иллюстрирует свойство возрастания функции $y = \operatorname{tg} x$. Аналитически это будет доказано позже, после изучения тригонометрического тождества разности тангенсов.

6) Т. к. тангенс принимает положительные значения в I и III четвертях, а отрицательные — во II и IV четвертях, то $\left(n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ и $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi; n\pi\right)$ являются соответственно промежутками, где тангенс положительный и отрицательный. Учитывая периодичность тангенса, получили все возможные промежутки знакопостоянства.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$. Обоснуйте самостоятельно все свойства функции котангенс.

1) Областью определения является множество всех действительных чисел, кроме $x = n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) Функция нечетная.

3) Периодическая с периодом $n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; наименьшим положительным периодом является число π.

4) Функция принимает значения, равные 0 (нули функции), если $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

5) Промежутками убывания являются $(n\pi; \pi + n\pi)$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

6) Промежутками, где котангенс положительный, являются $\left(n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi;\right)$, а отрицательный — $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi; n\pi\right)$ при $n \in \boldsymbol{Z}$.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

Пример 1. Найти область определения функции:

1) $y = \frac{1}{\sin x - 1}$; 2) $y = \sqrt{\cos x}$; 3) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$;

4) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Р е ш е н и е . 1) Дробь $\frac{1}{\sin x - 1}$ существует, если знаменатель $\sin x - 1 \neq 0$. Отсюда $\sin x \neq 1$. Пользуясь графиком синусоиды, находим точки, в которых $\sin x = 1$. Отбрасывая их, получим

$$x \neq -\frac{3\pi}{2}; \quad x \neq \frac{\pi}{2}, \quad x \neq \frac{5\pi}{2}, \ \ldots .$$

Записывая все эти числа в виде одной формулы, имеем $x \neq (4k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) Выражение $\sqrt{\cos x}$ существует, если $\cos x \geq 0$. Выше

было доказано, что $\cos x > 0$ на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi; \frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$ и $\cos x = 0$ в точках $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Объединив эти множества чисел, имеем $\cos x \geq 0$ на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2}+2n\pi; \frac{\pi}{2}+2n\pi\right]$. Эти отрезки являются областью определения функции $y = \sqrt{\cos x}$.

3) Выражение $\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ существует при всех x, для которых существуют $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{ctg} x \neq 0$. Котангенс существует, если $x \neq k\pi$, а не равен нулю при всех $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$. Если записать первое множество чисел $k\pi$ в виде $2k\frac{\pi}{2}$, то можно объединить оба множества, учитывая, что все четные ($2k$) и нечетные ($2k+1$) числа образуют множество целых чисел. Итак, областью определения функции $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ является множество всех чисел x таких, что $x \neq n\frac{\pi}{2}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

4) Выражение $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ существует, если $x - \frac{\pi}{4} \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, т. е. $x \neq 2n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$. Отсюда $x \neq 2n\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}$, или $x \neq \frac{3\pi}{4} + n\pi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Найти область значений функции:

1) $y = \frac{1}{2}\cos x$; 2) $y = \sin x + 1$; 3) $y = \cos^2 x + 1$;

4) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 1$; 5) $y = \sin 2x$.

Р е ш е н и е . 1) Т. к. $\cos x$ изменяется от -1 до 1, то областью изменения функции $y = \frac{1}{2}\cos x$ является отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

2) В выражении $\sin x + 1$ наименьшее значение первого слагаемого -1, а наибольшее 1. Поэтому наименьшим значением выражения $\sin x + 1$ является число 0, а наибольшим — число 2. Таким образом, область значений функции $y = \sin x + 1$ — отрезок $[0; 2]$.

3) В выражении $\cos^2 x + 1$ первое слагаемое изменяется от 0 до 1, а все выражение — от 1 до 2. Таким образом, область значений функции $y = \cos^2 x + 1$ — отрезок $[1; 2]$.

4) Первое слагаемое выражения $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 1$ изменяется от 0 до $+\infty$, т. к. $\operatorname{tg} x$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, а $\operatorname{tg}^2 x$ — число неотрицательное. Поэтому областью значений функции $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 1$ является множество $[1; +\infty)$.

5) При любых действительных значениях x областью значений функции $y = \sin 2x$ является множество $[-1; 1]$.

Пример 3. Какое число больше:

1) $\sin\frac{\pi}{9}$ или $\sin\frac{\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{\pi}{9}$ или $\cos\frac{\pi}{4}$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ или $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ или $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$?

Решение. 1) Числам $\alpha_1 = \frac{\pi}{9}$ и $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ соответствуют точки единичной окружности P_{α_1} и P_{α_2}, которые принадлежат I четверти, где синус возрастает. Т. к. $\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{9}$, то $\sin\frac{\pi}{4} > \sin\frac{\pi}{9}$.

2) Косинус в I четверти убывает, поэтому $\cos\frac{\pi}{4} < \cos\frac{\pi}{9}$.

3) Числу $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ соответствует точка P_{α_1}, которая принадлежит I четверти, а числу $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$ — точка P_{α_2}, которая принадлежит II четверти. Поскольку тангенс в I четверти положительный, а в II — отрицательный, то $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} > \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$.

4) Числам $-\frac{\pi}{8}$ и $-\frac{\pi}{6}$ соответствуют точки P_{α_1} и P_{α_2}, которые принадлежат IV четверти, т. е. промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Т. к. котангенс — функция убывающая на каждом из промежутков области определения, а $-\frac{\pi}{8} > -\frac{\pi}{6}$, то $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right) < \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Пример 4. В каких четвертях может оканчиваться угол α, если:

1) $|\sin(-\alpha)| = -\sin\alpha$; 2) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$;
3) $|\operatorname{tg}\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$; 4) $|\operatorname{ctg}(-\alpha)| = -\operatorname{ctg}\alpha$?

Решение. 1) Поскольку синус — нечетная функция, то данное равенство можно записать в виде $|-\sin\alpha| = -\sin\alpha$. Модуль любого числа — число неотрицательное, поэтому неотрицательным должно быть выражение $-\sin\alpha$. Это означает, что $\sin\alpha \le 0$. Поэтому угол α может оканчиваться в III или IV четверти.

2) По определению модуля числа, модуль отрицательного числа равен противоположному числу. Поэтому $\cos\alpha$, по условию, принимает только отрицательные значения. Это означает, что угол α может оканчиваться во II или III четверти.

3) По определению модуля, $\operatorname{tg}\alpha$ — число неотрицательное. Поэтому угол α может оканчиваться в I или III четверти.

4) Т. к. $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$, то, по определению модуля, $-\operatorname{ctg}\alpha$ должен быть числом неотрицательным. Поэтому угол α может оканчиваться во II или IV четверти.

Пример 5. Построить график функции:

1) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Р е ш е н и е . 1) График данной функции построим с помощью геометрических преобразований известного графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

Если $\operatorname{tg} x = f(x)$, то $-\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -f(x + a)$, где $a = \frac{\pi}{4}$. Применим известные алгоритмы построения графиков с помощью геометрических преобразований: а) построим график функции $y = \operatorname{tg} x$; б) построим график $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, параллельно перенеся полученный график на расстояние $\frac{\pi}{4}$ влево вдоль оси Ox; в) построим график функции $-\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, отобразив предварительно построенный график симметрично относительно оси Ox (рис. 47).

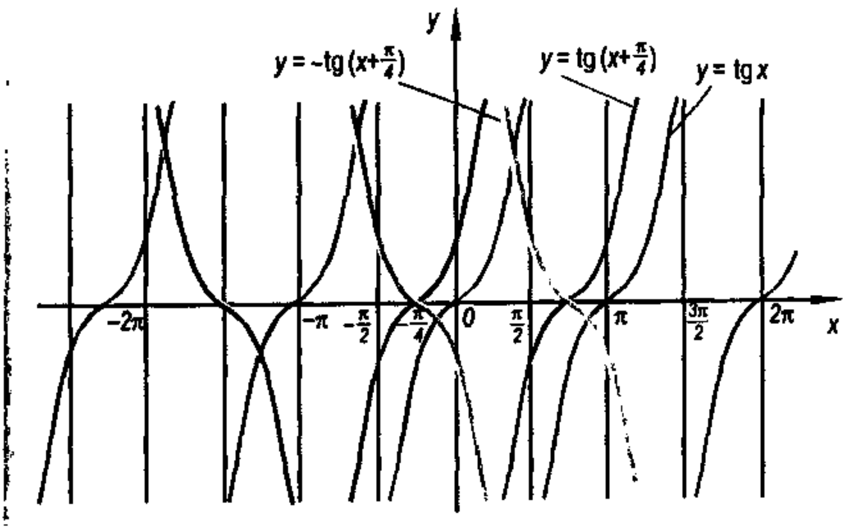

Рис. 47

2) Чтобы построить график функции $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ с помощью геометрических преобразований известного графика функции $y = \cos x$, следует преобразовать формулу, которая задает функцию так, чтобы перед аргументом x был коэффициент 1. Это даст возможность использовать построение графика $y = bf(x - a)$, если известен график $y = f(x)$. Итак, $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$. Последовательность построения такая (рис. 48). Строим графики: а) $y = \cos x$; б) $y = \cos\frac{1}{2}x$ (растяжение графика $y = \cos x$ вдвое от оси Oy); в) $y = 2\cos\frac{1}{2}x$ (растяжение графика $y = \cos\frac{1}{2}x$ вдвое от оси Ox); г) $y = 2\cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$ (параллельный перенос графика $y = 2\cos\frac{1}{2}x$ вдоль оси Ox на расстояние $\frac{\pi}{3}$ вправо).

Пример 6. По графику синусоидальных токов (рис. 49), которые проходят в обмотках катушек трехфазной системы, определить характеризующие параметры.

О т в е т . В обмотках проходят синусоидальные токи с одинаковыми амплитудами и одинаковой угловой частотой $\omega = 2\pi\upsilon$, фазы которых смещены на $\frac{1}{3}$ периода.

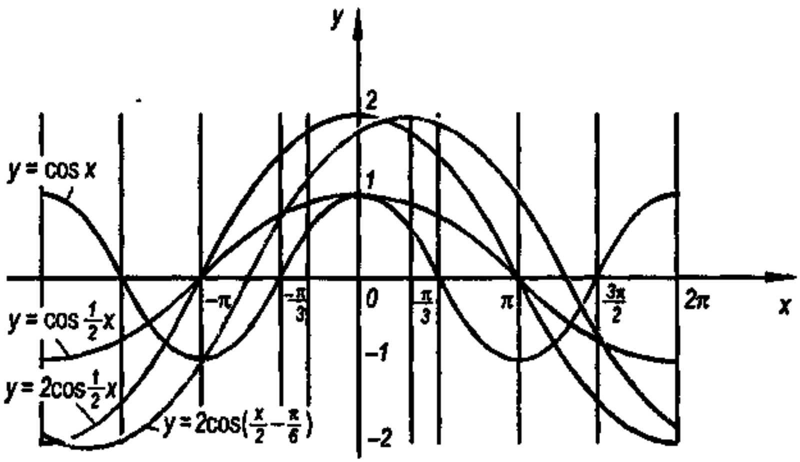

Рис. 48

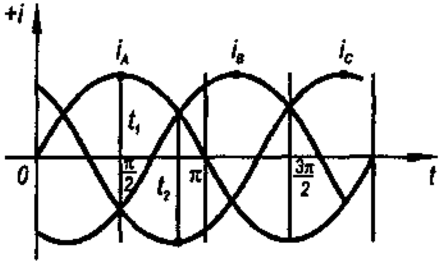

Рис. 49

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Назвать свойства функции $y = \sin x$. Доказать свойство убывания на определенных отрезках.

2. Назвать свойства функции $y = \cos x$. Доказать свойство четности этой функции.

3. Назвать свойства функции $y = \operatorname{tg} x$. Доказать, что эта функция нечетная на промежутках области определения.

4. Назвать свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$. Доказать, что она убывающая на всех промежутках области определения.

5. Пользуясь единичной окружностью и графиком функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; 2\pi]$, ответить на вопросы, предлагаемые в примере 1 относительно функции $y = \sin x$ (с. 54).

6. Построить график функции:

а) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = 2\cos x$;

в) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = |\sin x|$.

7. Пользуясь единичной окружностью и графиком функции $y = \operatorname{tg} x$, исследовать знаки функции, характер изменения ее значений и нули на промежутке $(0; 2\pi)$.

8. Построить график функции:

а) $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = 2\operatorname{tg}\frac{1}{3}x$;

в) $y = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$; г) $y = \operatorname{tg}|x|$.

9. Найти период функции $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ и ответить на вопросы, предлагаемые в примере 1 относительно $y = \sin x$ (с. 54).

10. Построить график функции:

а) $y = -2\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$; б) $y = |\cos|x||$;

в) $y = \frac{\sin x}{\sin x}$; г) $y = 2\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{12}\right)$.

УПРАЖНЕНИЯ

31. Найти область определения функции:
1) $y = \frac{1}{\sin x}$; 2) $y = \frac{1}{\sin x - 1}$; 3) $y = \sin\frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

32. Найти область значений функции:
1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \operatorname{tg} x + 1$;
3) $y = 2\operatorname{ctg}^2 x + 3$; 4) $y = \cos x + 1$.

33. Какое из чисел больше:
1) $\cos\frac{\pi}{5}$ или $\cos\frac{\pi}{4}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ или $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$;
3) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}$ или $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$ или $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$?

34. В каких четвертях может оканчиваться угол α, если:
1) $|\cos(-\alpha)| = -\cos\alpha$; 2) $|\operatorname{ctg}\alpha| = \operatorname{ctg}\alpha$;
3) $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$; 4) $|\operatorname{tg}(-\alpha)| = -\operatorname{tg}\alpha$?

35. Расставить в порядке возрастания числа:
1) $\cos 15°$; $\cos 70°$; $\cos(-25°)$; $\cos 230°$; $\cos(-130°)$;
2) $\cos 1{,}5$; $\cos(-1{,}3)$; $\cos\frac{3\pi}{2}$; $\cos(-2)$; $\cos\frac{6\pi}{5}$; $\cos 2$;
3) $\operatorname{ctg} 3$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{ctg}(-120°)$; $\operatorname{tg} 2$; $\operatorname{tg}(-3)$; $\operatorname{tg} 120°$.

36. Найти промежутки знакопостоянства и нули функции:
1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \frac{1}{\sin x}$; 3) $y = \cos\frac{x}{3}$;
4) $y = \sin^2 x$; 5) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 6) $y = \operatorname{ctg} 2x$.

§ 8. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

При изучении тригонометрических функций острого угла в 8 классе по теореме Пифагора было доказано основное тригонометрическое тождество

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}\ . \tag{1}$$

Оно выполняется для тригонометрических функций любого угла и тригонометрических функций произвольного числового аргумента. Докажем это. Если косинус числа α — это абсцисса точки P_α единичной окружности, а синус числа α — ордината этой точки, т. е. $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, то точка $P_\alpha(x; y)$ удалена от центра окружности на расстояние, равное 1. Известно, что расстояние точки от начала координат определяется по формуле $x^2 + y^2 = r^2$. Если $r = 1$, то $x^2 + y^2 = 1$, т. е. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Определив тангенс и котангенс через синус и косинус, мы ввели еще два независимых соотношения:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\ , \tag{2}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}\ . \tag{3}$$

Из тождеств (1)—(3) следуют еще несколько соотношений, которые часто используют при вычислении значений тригонометрических функций по известному значению одной из них.

Перемножив почленно равенства (2) и (3), получим $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$. Отсюда

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}\ , \tag{4}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}}\ . \tag{5}$$

Разделив обе части равенства (1) на $\cos^2\alpha$, получим:

$\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, или

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}\ . \tag{6}$$

Тождество (1) выполняется для любого значения аргумента, тождества (2) и (3) — для всех значений, кроме тех, при которых $\cos\alpha = 0$ и $\sin\alpha = 0$, соответственно.

Приведем примеры применения основных тригонометрических тождеств для вычисления значений тригонометрических функций по известному значению одной из них. Они иллюстрируют возможность упрощения вычислений значений тригонометрических выражений и показывают способы доказательств других тригонометрических тождеств.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

Пример 1. Найти значение всех тригонометрических функций аргумента α, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. В III четверти, где на единичной окружности расположены точки, которые соответствуют числу α, тангенс и котангенс положительны, а синус и косинус отрицательны.

Из тождества $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ находим $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\frac{9}{16}} = \frac{16}{25}$, а $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

Из тождества (1) имеем: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$, $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$. Из тождества (4) находим $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$. В таблице 2 представлены формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента.

Таблица 2

Функция	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	

В приведенных формулах перед знаком радикала следует взять знак «плюс» или «минус» в зависимости от того, в какой четверти лежит угол α, а именно так, чтобы знак тригонометрической функции, который стоит в левой части, совпадал со знаком величины, стоящей в правой части равенства.

Пример 2. Упростить выражение:

1) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 2) $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; 3) $1-\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha\cos\alpha$;

4) $(1+\cos\alpha)\,\mathrm{tg}^2\alpha\,(1-\cos\alpha)$; 5) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$;

6) $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\mathrm{ctg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha+1$; 7) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\cos^2\beta-\cos^2\alpha$;

8) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha$.

Р е ш е н и е . 1) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$
$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha.$

2) $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=(1-\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=$
$=2\sin^2\alpha$;

3) $1-\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha\cos\alpha=1-\sin\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha=1-\cos^2\alpha=$
$=\sin^2\alpha$;

4) $(1+\cos\alpha)\,\mathrm{tg}^2\alpha(1-\cos\alpha)=(1-\cos^2\alpha)\,\mathrm{tg}^2\alpha=\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha$;

5) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}=\frac{-(1-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}=-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-\mathrm{ctg}^2\alpha$;

6) $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\mathrm{ctg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha+1=\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{ctg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha+1=\mathrm{tg}^2\alpha+1=$
$=\frac{1}{\cos^2\alpha}$;

7) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\cos^2\beta-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-(\sin^2\beta+$
$+\cos^2\beta)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-1=-2\cos^2\alpha$;

8) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)+$
$+2\cos^2\alpha=1$.

Пример 3. Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=m$. Найти: $\sin\alpha\cos\alpha$.

Р е ш е н и е . Возведем обе части данного равенства в квадрат. Имеем $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=m^2$, или $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=$ $=m^2$. Отсюда $1+2\sin\alpha\cos\alpha=m^2$, отсюда $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{m^2-1}{2}$.

Пример 4. Вычислить $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, если $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{5}{2}$.

Р е ш е н и е . Данную дробь следует сначала выразить через tg α, а потом вычислить ее значение. Для этого разделим числитель и знаменатель данной дроби на $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$$

Если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{2}$, то $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{25}{4}-1}=\frac{10}{21}$.

Пример 5. Доказать, что выражение $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ не зависит от α, т. е. является величиной постоянной.

Р е ш е н и е . $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}-1}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}=$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1.$$

Пример 6. Доказать тождество

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=2\operatorname{ctg}\alpha,\ \text{если } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Р е ш е н и е . Доказательство тригонометрических тождеств можно производить разными способами:

1) с помощью тождественных преобразований следует показать, что одну часть равенства (левую или правую) можно представить в виде другой;

2) левую и правую части равенства привести к одному и тому же выражению;

3) составить разность левой и правой частей равенств и с помощью тождественных преобразований показать, что эта разность равна 0.

Данное тождество докажем, пользуясь первым способом:

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}}-$$

$$-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}}=\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}=\frac{|1+\cos\alpha|}{|\sin\alpha|}-\frac{|1-\cos\alpha|}{|\sin\alpha|}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}-$$

$$-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1+\cos\alpha-1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\operatorname{ctg}\alpha,$$

т. к. синус и косинус, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, положительны, $1-\cos\alpha\geq$

≥ 0, поэтому $|\sin\alpha| = \sin\alpha$, $|1 + \cos\alpha| = 1 + \cos\alpha$, $|1 - \cos\alpha| = 1 - \cos\alpha$ (косинус по модулю не превышает 1).

1. Доказать основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2. Какие еще соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента существуют?

3. Доказать, что $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

УПРАЖНЕНИЯ

37. Упростить выражение:

А

1) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; 3) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 5) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$;

6) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha - 1)$.

Б

7) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha + 1)$;

8) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$;

9) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$; 10) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} - \cos\alpha$;

11) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$; 12) $\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha}$.

В

13) $\dfrac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$; 14) $\dfrac{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha$;

15) $\left(\operatorname{tg}^2\alpha - \dfrac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$; 16) $\sqrt{\dfrac{8}{1+\cos\alpha}+\dfrac{8}{1-\cos\alpha}}$.

38. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m$. Найти:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$.

39. Вычислить: 1) $\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$;

2) $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

40. Доказать, что выражение $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ не зависит от α.

41. Вычислить значение всех тригонометрических функций по данному значению одной из них:

1) $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\operatorname{tg} x = 2$; $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{ctg} x = \frac{7}{24}$, $180^\circ < x < 270^\circ$;

4) $\sin x = -\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

42. Доказать тождество:

А

1) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

2) $(1 - \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 = \frac{2}{\cos^2\alpha}$;

3) $(\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha = \cos^2\alpha$;

4) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$.

Б

5) $\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}\,\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{1+\operatorname{ctg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 6) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$;

7) $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$; 8) $2\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}$.

В

9) $\sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$;

10) $1 + \frac{\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

11) $1 - (\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

12) $\frac{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} + 1 = 2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha + \sin\alpha$.

§ 9. Вычисление значений тригонометрических функций и тригонометрических выражений с помощью микрокалькуляторов

1. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$. Значения этих функций вычисляют по программам[1]:

x $\boxed{\text{F}}$ $\underline{\sin}$; x $\boxed{\text{F}}$ $\underline{\cos}$; x $\boxed{\text{F}}$ $\underline{\mathrm{tg}}$.

При вычислении значений функции $y = \mathrm{ctg}\, x$ используют тождество $\mathrm{ctg}\ x = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}$. Поэтому программа вычисления имеет вид x $\boxed{\text{F}}$ $\underline{\mathrm{tg}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\underline{1/x}$.

Микрокалькулятор дает возможность вычислять значения тригонометрических функций в градусной или радианной мерах, поэтому перед вычислением переключатель «Г — Р» необходимо установить в соответствующее положение.

Отметим, что, вычисляя значения тригонометрических функций или выражений с ними, аргумент x используют в пределах $0° \le x \le 90°$ (в градусной мере) или $0 \le x \le 1{,}57$ (в радианной мере); для тангенсов соответственно в пределах $0° \le x < 90°$; $0 \le x < 1{,}57$.

Если аргумент x задан целым числом градусов, то сначала это число вводят в регистр индикации (на экран), а потом нажимают последовательно клавишу $\boxed{\text{F}}$ и клавишу соответствующей тригонометрической функции.

Пример 1. Найти $\sin 75°$.

Программа. 75 $\boxed{\text{F}}$ $\underline{\sin}$.

Ответ. $\sin 75° \approx 0{,}9659$.

В рассмотрённом примере восьмиразрядное число на индикаторе округлено до четырех правильных десятичных знаков.

Если аргумент задан в градусах и минутах, то минуты предварительно преобразовывают в части градуса, а значения аргумента записывают десятичной дробью, которая содержит целую и дробную части градусов. Например, пусть $x = 24°12'$. Т. к. $12'$ составляют $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ частей градуса, то $x = 24\frac{1}{5}^{\circ}$. Преобразование в десятичную дробь числа $24\frac{1}{5}$ выполняют по программе 1 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{+}$ 24 $\boxed{=}$.

[1] Здесь и далее использован микрокалькулятор «Электроника МКШ-2».

Ответ. $x = 24{,}2°$.

Программа вычисления значения sin $24°12'$ имеет вид

1 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{+}$ 24 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\underline{\sin}$.

Ответ. $\sin\ 24°12' \approx 0{,}4099$.

Пример 2. Вычислить $\cos \frac{7\pi}{3}$.

Устанавливаем переключатель на режим работы в радианной мере. Т. к. $\cos \frac{7\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3}$, то программа имеет вид

$\boxed{F}$ $\underline{\pi}$ $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\underline{\cos}$.

Ответ. $\cos \frac{7\pi}{3} = 0{,}5$.

Пример 3. Вычислить $\cos \frac{2\pi}{3}$.

Отметим, что микрокалькулятор вычисляет лишь модули значений тригонометрических функций. Поэтому знак «минус» надо набирать дополнительно, нажимая клавишу $\boxed{\vdash\!\dashv}$ в зависимости от координатной четверти для конкретного аргумента. Т. к. $\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$, то можно составить программу

$\boxed{F}$ $\underline{\pi}$ $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\underline{\cos}$ $\boxed{\vdash\!\dashv}$.

Ответ. $\cos \frac{2\pi}{3} = -0{,}5$.

2. Вычисление значений выражений, содержащих тригонометрические функции. Рассмотрим два примера.

Пример 4. Вычислить $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha \approx 0{,}52$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Можно воспользоваться основными тригонометрическими тождествами и найти приближенные значения функций по формулам:

1) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, $\sin \alpha \approx \sqrt{1 - 0{,}52^2} \approx 0{,}85$;

2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{0{,}85}{0{,}52} \approx 1{,}6$;

3) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha \approx \frac{1}{1{,}6} \approx 0{,}61$.

Все три значения функций можно найти, пользуясь непрерывной программой 1 $\boxed{-}$ 0,52 $\boxed{F}$ $\underline{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\underline{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 0,52 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\underline{1/x}$.

О т в е т . $\sin\alpha \approx 0{,}85$; $\operatorname{tg}\alpha \approx 1{,}6$; $\operatorname{ctg}\alpha \approx 0{,}61$.

Пример 5. Вычислить значение выражения:

1) $\sin 25° + \cos 70°$; 2) $a = \dfrac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$, если $b \approx 25$, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 65°$.

П р о г р а м м ы.

1) 25 $\boxed{F}$ sin $\boxed{+}$ 70 $\boxed{F}$ cos $\boxed{=}$;

2) 25 $\boxed{\times}$ 28 $\boxed{F}$ sin $\boxed{\div}$ 65 $\boxed{F}$ sin $\boxed{=}$.

О т в е т . 1) 0,7646; 2) $12{,}950039 \approx 13$.

Если в этих двух примерах аргумент тригонометрических функций был бы выражен в градусах и минутах, то пришлось бы использовать регистр памяти. Ведь во время вычисления значений каждой из тригонометрических функций операционный регистр занят, а его необходимо одновременно использовать и для выполнения действий над тригонометрическими функциями (в данных примерах сложение и деление).

Пример 6. Вычислить значение выражения:

1) $\sin 25°20' + \cos 70°12'$; 2) $a = \dfrac{25{,}00\sin 28°15'}{\sin 65°42'}$.

Программы.

1) 20 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 25 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{П}$ 12 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 70 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ cos $\boxed{+}$ $\boxed{ИП}$ $\boxed{=}$;

2) 42 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 65 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{П}$ 15 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 28 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{\times}$ 25 $\boxed{\div}$ $\boxed{ИП}$ $\boxed{=}$.

О т в е т . 1) 0,7666; 2) $12{,}983322 \approx 12{,}98$.

Вычисления двух последних выражений можно выполнять непрерывной цепочкой, не обращаясь к памяти, если использовать клавиши $\boxed{(}$ и $\boxed{)}$. Соответствующие программы имеют вид:

20 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 25 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{+}$ $\boxed{(}$ 12 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 70 $\boxed{)}$ $\boxed{F}$ cos $\boxed{=}$;

25 $\boxed{\times}$ $\boxed{(}$ 15 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 28 $\boxed{)}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 42 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 65 $\boxed{)}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{=}$.

Проверьте ответы, найденные по этим программам.

Рассмотрим примеры вычислений более сложных выражений.

Пример 7. Найти с точностью до 1 сторону ΔABC, у которого $a \approx 36$, $c \approx 52$, $\angle B \approx 48°$.

По теореме косинусов,

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$, $b \approx \sqrt{36^2 + 52^2 - 2 \cdot 36 \cdot 52\cos 48^\circ}$.

Полученное выражение можно вычислить несколькими способами. Без использования регистра памяти последовательность вычислений будет такой:

1) найти произведение $2 \cdot 36 \cdot 52 \cos 48^\circ$ и изменить знак результата с помощью клавиши $\boxed{\vdash\!\dashv}$;

2) прибавить к полученному числу квадраты чисел 36 и 52 с помощью клавиши $\underline{x^2}$;

3) из найденного результата извлечь квадратный корень.

П р о г р а м м а.

$2\ \boxed{\times}\ 36\ \boxed{\times}\ 52\ \boxed{\times}\ 48\ \boxed{F}\ \underline{\cos}\ \boxed{+}\ \boxed{\vdash\!\dashv}\ 36\ \boxed{F}\ \underline{x^2}\ \boxed{+}\ 52\ \boxed{F}\ \underline{x^2}\ \boxed{=}\ \boxed{F}\ \underline{\sqrt{\ }}$.

О т в е т . $b \approx 38{,}662349 \approx 39$.

Пример 8. Вычислить заряд шарика q, масса которого $m = 2{,}0$ г, вращающегося на нити длиной $l = 1{,}2$ м вокруг неподвижного такого же точечного заряда q. Период вращения шарика $T = 3{,}2$ с, а угол отклонения от вертикали $\alpha = 25^\circ$.

После решения задачи получим ответ в виде формулы:

$$q = l\sin\alpha\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m\left(g\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{4\pi^2}{T^2}l\sin\alpha\right)},$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Кл}}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}$; $g = 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

После подстановки числовых значений надо вычислить выражение $q = 1{,}2\sin\ 25^\circ \times$

$$\times\sqrt{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}0\left(9{,}8\,\mathrm{tg}\,25^\circ - \frac{4\pi^2}{3{,}2^2} \cdot 1{,}2\sin 25^\circ\right)} =$$

$$= 1{,}2\sin 25^\circ \cdot \sqrt{8\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-15}\left(9{,}8\,\mathrm{tg}\,25^\circ - \frac{4\pi^2}{3{,}2^2} \cdot 1{,}2\sin 25^\circ\right)}.$$

П р о г р а м м а.

$4\ \boxed{\times}\ \boxed{F}\ \underline{\pi}\ \boxed{F}\ \underline{x^2}\ \boxed{\div}\ 3{,}2\ \boxed{F}\ \underline{x^2}\ \boxed{\times}\ 1{,}2\ \boxed{\times}\ 25\ \boxed{F}\ \underline{\sin}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{П}}\ 9{,}8\ \boxed{\times}\ 25\ \boxed{F}\ \underline{\mathrm{tg}}\ \boxed{-}\ \boxed{\text{ИП}}\ \boxed{\times}\ 8{,}85 \cdot 10^{-15}\ \boxed{\times}\ \boxed{F}\ \underline{\pi}\ \boxed{\times}\ 8\ \boxed{=}\ \boxed{F}\ \underline{\sqrt{\ }}\ \boxed{\times}\ 1{,}2\ \boxed{\times}\ 25\ \boxed{F}\ \underline{\sin}\ \boxed{=}$.

О т в е т . $q \approx 38{,}67 \cdot 10^{-8}$ Кл $\approx 39 \cdot 10^{-8}$ Кл.

ВОПРОСЫ [illegible]

1. Как вычисляются значения тригонометрических функций с помощью микрокалькулятора?

2. Составить программы для вычисления значений всех тригонометрических функций по известному значению одной из них.

3. Составить программу для вычисления стороны треугольника по теореме синусов.

4. Составить программу для вычисления стороны треугольника по теореме косинусов.

УПРАЖНЕНИЯ

43. С помощью микрокалькулятора вычислить $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha \approx 0{,}48$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

44. С помощью микрокалькулятора вычислить с точностью до 10^{-3} значение выражения:

1) $\dfrac{12{,}3\sin 28^\circ 20'}{\sin 49^\circ 40'}$;

2) $a = \sqrt{35{,}2^2 + 47{,}6^2 - 2\cdot 35{,}2\cdot 47{,}6\cos 25^\circ 50'}$;

3) $\dfrac{95{,}2\sin 43^\circ 40'}{\sin 62^\circ 30'}$;

4) $c = \sqrt{41{,}25^2 + 72{,}73^2 - 2\cdot 41{,}25\cdot 72{,}73\cos 37^\circ 28'}$.

45. С помощью микрокалькулятора найти с точностью до 1° угол φ, если:

1) $\cos\varphi = \cos\alpha\cos\beta$, где $\alpha = 28^\circ$, $\beta = 56^\circ$;

2) угол A в ΔABC, если $a = 42$, $b = 65$, $c = 28$;

3) угол φ, если $\sin\varphi = \sin\alpha\sin\beta$, где $\alpha = 42^\circ 36'$, $\beta = 65^\circ 12'$;

4) угол A в ΔABC, если $c = 53{,}2$, $\angle C = 59^\circ 20'$, $a = 32{,}7$.

46. С помощью микрокалькулятора найти радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, по формуле

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}},$$ если $a = 28{,}6$, $\alpha = 68^\circ 40'$.

47. С помощью микрокалькулятора вычислить начальную скорость движения электрона по формуле $v = \sqrt{\dfrac{2leU}{md\sin\alpha}}$, где $l = 25$ см; $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл; $U = 2{,}1\cdot 10^{3}$ В; $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг; $d = 0{,}56$ м; $\alpha = 32^\circ$.

Замечание. В предложенных упражнениях значения линейных элементов и углов считают приближенными, хотя и использован знак точного равенства. Знак «=» можно использовать для приближенных данных, когда все цифры правильные. Результат вычисления следует округлить по правилам приближенных вычислений.

Тригонометрические тождества сложения

1. Формулы тригонометрических функций суммы и разности двух чисел.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta; \qquad (2)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta; \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (5)$$

Докажем формулу (1), из которой нетрудно получить остальные.

Пусть α и β — любые числа. Выберем на единичной окружности точки P_α, $P_{-\beta}$ и $P_{\alpha+\beta}$, образованные из точки $P_0(1;0)$ ее поворотом соответственно на углы α, $-\beta$, $\alpha+\beta$ (рис. 50). Учитывая определения синуса и косинуса, можно записать координаты выбранных точек: $P_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha)$, $P_{-\beta}(\cos(-\beta); \sin(-\beta))$, $P_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta); \sin(\alpha+\beta))$.

Хорды $P_0P_{\alpha+\beta}$ и $P_{-\beta}P_\alpha$ равны, т. к. равны соответствующие им дуги окружности. Найдем длины этих хорд по формуле расстояния между двумя точками:

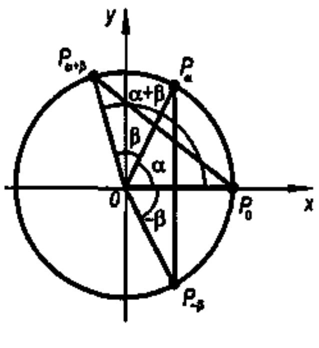

Рис. 50

$$P_0P_{\alpha+\beta}^2 = \left(1-\cos(\alpha+\beta)\right)^2 + \left(\sin(\alpha+\beta)\right)^2;$$

$$P_{-\beta}P_\alpha^2 = \left(\cos(-\beta)-\cos\alpha\right)^2 + \left(\sin(-\beta)-\sin\alpha\right)^2.$$

Так как $P_0P_{\alpha+\beta} = P_{-\beta}P_\alpha$, то $(P_0P_{\alpha+\beta})^2 = (P_{-\beta}P_\alpha)^2$.

Поэтому $(1-\cos(\alpha+\beta))^2 + (\sin(\alpha+\beta))^2 = (\cos(-\beta) - \cos\alpha)^2 + (\sin(-\beta) - \sin\alpha)^2$.

Воспользовавшись свойством четности косинуса и нечетности синуса, а также формулой квадрата двучлена, получим:

$$1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) = \cos^2\beta - $$
$$- 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, имеем:

$$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta.$$

Выразив из последнего равенства $\cos(\alpha+\beta)$, получим формулу (1) для косинуса суммы двух аргументов:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Формулу (2) получим, заменив в формуле (1) β на $-\beta$ и воспользовавшись четностью косинуса и нечетностью синуса:

$$\cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta);$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Формулу сложения для синуса можно получить из формулы (1) и формулы приведения $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Указанную формулу приведения можно получить из формулы (2), подставив $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Действительно, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2} \times$ $\times \cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta = 0\cdot\cos\beta + 1\cdot\sin\beta = \sin\beta$. Итак, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$ $= \sin\beta$.

Заменив в этой формуле β на $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \text{ или } \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Таким образом, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$.

Выразим $\sin(\alpha+\beta)$, воспользовавшись формулой $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$ $= \sin\beta$ относительно числа $(\alpha+\beta)$ в обратном порядке:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Итак, получили формулу (3):

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Формулу (4) получим, заменив в формуле (3) β на $-\beta$ и воспользовавшись четностью косинуса и нечетностью синуса:

$$\sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta).$$

Отсюда

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Формулу сложения для тангенса можно получить по определению тангенса и по формулам сложения для синуса и косинуса:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделив почленно числитель и знаменатель правой части на выражение $\cos\alpha\cos\beta$ (объясните, почему оно не равняется 0), получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Итак, получили формулу (5):

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Если заменить в формуле (5) β на $-\beta$ и учесть нечетность тангенса, то

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \quad (6)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

2. Формулы приведения. Чтобы записать любую формулу приведения, когда $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, полезно знать следующие правила (табл. 3):

1) если угол α достраивается относительно вертикального диаметра (рис. 51) (это углы, которые отвечают числам $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$), то название данной функции изменяется на **кофункцию** (синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот); если угол α достраивается относительно горизонтального диаметра (рис. 52) (это углы, соответствующие числам $\pi \pm \alpha$), то название данной функции не изменяется;

Т а б л и ц а 3

Функция	$90^\circ + \alpha$ $\frac{\pi}{2} + \alpha$	$180^\circ + \alpha$ $\pi + \alpha$	$270^\circ + \alpha$ $\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$ $\frac{\pi}{2} - \alpha$	$180^\circ - \alpha$ $\pi - \alpha$	$270^\circ - \alpha$ $\frac{3\pi}{2} - \alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

2) перед полученной функцией ставится тот знак, который имеет функция, преобразуемая по формуле приведения.

3. Тригонометрические функции двойного аргумента. Это формулы, которые выражают функции аргумента 2α через функции аргумента α. Их можно получить из формул сложения.

Предположив, что $\beta = \alpha$ в формуле (3), получим формулу синуса двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (7)$$

Из формулы (1), если $\beta = \alpha$, получим формулу косинуса двойного аргумента:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (8)$$

Если заменить с помощью основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ функцию $\cos\alpha$ на $\sin\alpha$ или $\sin\alpha$ на $\cos\alpha$, то получим еще две формулы для $\cos 2\alpha$:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Из формулы (5), если $\beta = \alpha$, имеем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (9)$$

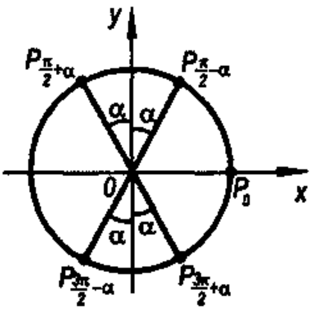

Рис. 51

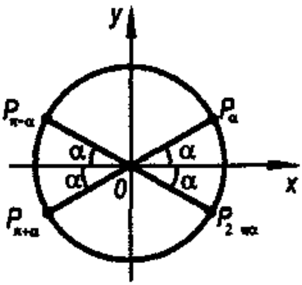

Рис. 52

Формулы (7) и (8) выполняются для любых значений аргумента, а формула (9) — только для тех, для которых существуют $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $1 - \operatorname{tg}^2\alpha \neq 0$.

4. Тригонометрические функции половинного аргумента. Запишем две известные формулы:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad 1 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Если $x = \frac{\alpha}{2}$, эти формулы будут иметь вид:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Складывая почленно эти два равенства и отнимая от второго равенства первое, получим такие две формулы:

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Выразив из них квадраты функций, получим формулы половинного аргумента для квадратов синуса и косинуса:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Отсюда:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Эти формулы дают возможность заменить квадраты тригонометрических функций на функции первой степени. Поэтому их называют также формулами понижения степени.

Разделив почленно два предпоследних равенства, получим формулы для квадратов тангенса и котангенса половинного аргумента:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Отсюда:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$	$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;$	$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$	$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$
	$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$

5. Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций. Эти формулы дают возможность преобразовывать сумму и разность одноименных тригонометрических функций через произведение тригонометрических функций и наоборот.

Чтобы преобразовать сумму $\sin\alpha + \sin\beta$ в произведение, обозначим $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$. Тогда $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y =$

$$= 2\sin x\cos y.$$

Учитывая введенное обозначение, решим систему

$$\begin{cases} x + y = \alpha, \\ x - y = \beta \end{cases}$$

относительно x и y. Получим $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Таким образом,

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (10)$$

Заменяя в формуле (10) β на $-\beta$ и учитывая нечетность синуса, получим

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (11)$$

Так же находим $\cos\alpha + \cos\beta = \cos(x + y) + \cos(x - y) =$

$$= \cos x\cos y - \sin x\sin y + \cos x\cos y + \sin x\sin y =$$

$$= 2\cos x\cos y = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Таким образом,

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (12)$$

$\cos\alpha - \cos\beta = \cos(x + y) - \cos(x - y) =$

$= \cos x\cos y - \sin x\sin y - \cos x\cos y - \sin x\sin y =$

$= -2\sin x\sin y = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

Таким образом,

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (13)$$

Пользуясь определением функции тангенс, найдем сумму и разность тангенсов:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Таким образом,
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \tag{14}$$
$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \tag{15}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$
$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Применим формулы разности синусов и разности косинусов для доказательства возрастания функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $y = \cos x$ на отрезке $[\pi; 2\pi]$.

Пусть $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $x_2 > x_1$. Докажем, что разность $f(x_2) - f(x_1)$ положительна. Действительно, $f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0$, т. к. по условию $x_2 - x_1 > 0$, $-\frac{\pi}{2} \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2}$, поэтому $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2+x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{x_2-x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, а значит, $\cos\frac{x_2+x_1}{2} > 0$ и $\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0$. Таким образом, $\sin x_2 > \sin x_1$.

Докажите самостоятельно, что синус убывает на отрезках $\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пусть $x_1 \in [\pi; 2\pi]$, $x_2 \in [\pi; 2\pi]$ и $x_2 > x_1$. Докажем, что разность $f(x_2) - f(x_1)$ положительна. Действительно, $f(x_2) - f(x_1) = \cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0$, т. к. по условию $\pi \le x_1 <$

$< x_2 \le 2\pi$, поэтому $\pi < \dfrac{x_2+x_1}{2} < 2\pi$, $0 < \dfrac{x_2-x_1}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, а значит, $\sin\dfrac{x_1+x_2}{2} < 0$, $\sin\dfrac{x_2-x_1}{2} > 0$. Таким образом, $\cos x_2 > \cos x_1$.

Докажите самостоятельно, что косинус убывает на отрезках $[2n\pi;\ \pi + 2n\pi]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. Вывести формулы преобразования произведения двух тригонометрических функций в сумму можно, использовав тождества (1) и (2), а также (3) и (4):

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}; \tag{16}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}; \tag{17}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}. \tag{18}$$

7. Формулы преобразования синуса и косинуса угла через тангенс половинного угла. Имеем:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Разделим числитель и знаменатель образованной дроби на $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ при условии, что $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} \neq 0$. Отсюда $\dfrac{\alpha}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, и

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{19}$$

Аналогично выразим $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{20}$$

Если разделить почленно равенства (19) и (20), то получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{21}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

Выведенные формулы широко используют для упрощения выражений, доказательств тождеств, решения тригонометрических уравнений, неравенств и др.

Пример 1. Вычислить значение выражения, не применяя таблицы тригонометрических функций и калькулятор:

1) $\cos 75°$; 2) $\sin\frac{7\pi}{12}$; 3) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}$; 4) $\cos 210°$;

5) $\sin 75° + \sin 15°$; 6) $\frac{\mathrm{tg}\,13° + \mathrm{tg}\,47°}{1 - \mathrm{tg}\,13°\,\mathrm{tg}\,47°}$; 7) $\sin 22°30'$;

8) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}$; 9) $\sin\frac{5\pi}{24}\cdot\sin\frac{\pi}{24}$; 10) $\cos\frac{\alpha}{2}$,

если $\cos\alpha = \frac{119}{169}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. 1) Пусть $75° = 45° + 30°$. Тогда $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45°\cos 30° - \sin 45°\sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right);$$

2) $$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right);$$

3) $$\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}}{1-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}};$$

4) $\cos 210° = \cos(180° + 30°) = \cos 180°\cos 30° - \sin 180°\cdot\sin 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2} =$

$= 2\sin 45^\circ\cos 30^\circ = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

6) $\frac{\operatorname{tg}13^\circ + \operatorname{tg}47^\circ}{1-\operatorname{tg}13^\circ\operatorname{tg}47^\circ} = \operatorname{tg}(13^\circ+47^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$;

7) $\sin 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(знак плюс перед корнем взят потому, что угол $22^\circ 30'$ принадлежит I четверти, а синус в I четверти положительный);

8) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} =$

$= \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$;

9) $\sin\frac{5\pi}{24}\cdot\sin\frac{\pi}{24} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{24}-\frac{\pi}{24}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{24}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$;

10) $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{119}{169}}{2}} = -\sqrt{\frac{169+119}{169\cdot 2}} = -\sqrt{\frac{288}{169\cdot 2}} =$

$= -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$.

Пример 2. Упростить выражение:

1) $\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\alpha-\pi)-\operatorname{tg}(\alpha-\pi)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $\frac{\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}18^\circ}{\operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}18^\circ-1}$;

4) $\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$;

5) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha$;

6) $\dfrac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha+\cos 12\alpha}$.

Решение.

1) $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$

$=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\alpha-\pi)-\operatorname{tg}(\alpha-\pi)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)=$

$=\cos\alpha-\cos(\pi-\alpha)+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(2\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=$

$=\cos\alpha+\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha=2\cos\alpha$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}18^\circ}{\operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}18^\circ-1}=-\dfrac{\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}18^\circ}{1-\operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}18^\circ}=-\operatorname{tg}(27^\circ+18^\circ)=$

$=-\operatorname{tg}45^\circ=-1$;

4) $\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha=(\cos^4\alpha-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+$
$+\sin^4\alpha)-4\cos^2\alpha\sin^2\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2-(2\sin\alpha\cos\alpha)^2=$
$=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos 4\alpha$;

5) $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos\alpha=1-\cos\alpha+\cos\alpha=1$;

6) $\dfrac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha+\cos 12\alpha}=$

$=\dfrac{(\sin 8\alpha+\sin 12\alpha)+(\sin 9\alpha+\sin 11\alpha)+\sin 10\alpha}{(\cos 8\alpha+\cos 12\alpha)+(\cos 9\alpha+\cos 11\alpha)+\cos 10\alpha}=$

$=\dfrac{2\sin 10\alpha\cos 2\alpha+2\sin 10\alpha\cos\alpha+\sin 10\alpha}{2\cos 10\alpha\cos 2\alpha+2\cos 10\alpha\cos\alpha+\cos 10\alpha}=$

$=\dfrac{\sin 10\alpha(2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+1)}{\cos 10\alpha(2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+1)}=\operatorname{tg}10\alpha$.

Пример 3. Представить выражение в виде произведения или дроби:

1) $1-\cos\dfrac{5}{2}\alpha$; 2) $1+\sin 3\alpha$; 3) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$;
4) $1+\operatorname{tg}\alpha$; 5) $a\sin\alpha+b\cos\alpha$; 6) $3-\operatorname{tg}^2\alpha$.

Решение.

1) $1-\cos\dfrac{5}{2}\alpha=2\sin^2\dfrac{5}{4}\alpha$;

2) $1+\sin 3\alpha=1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-3\alpha\right)=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3}{2}\alpha\right)$;

3) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha = (1 - \cos\alpha) + \sin\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} +$

$$+ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}{2}\cos\frac{\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}}{2} =$$

$$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

4) $1 + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha} =$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sqrt{2}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\alpha};$$

5) $a\sin\alpha + b\cos\alpha = a\left(\sin\alpha + \dfrac{b}{a}\cos\alpha\right) =$

$$= a(\sin\alpha + \operatorname{tg}\varphi\cos\alpha) = \left(\sin\alpha + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha\right) =$$

$$= a\,\frac{\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{a\sin(\alpha + \varphi)}{\cos\varphi},$$

где $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$, т. к. любому числу, в данном случае $\frac{b}{a}$, $(a \neq 0)$, соответствует тангенс некоторого угла φ. Угол φ всегда можно вычислить по известному значению тангенса;

6) $3 - \operatorname{tg}^2\alpha = (\sqrt{3})^2 - \operatorname{tg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}^2\alpha =$

$$= \left(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)\left(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}}\;\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\alpha}.$$

Пример 4. Доказать тождество:

1) $\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta$;

2) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = 1$;

3) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}\;\dfrac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

4) $\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha;$

5) $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha};$

6) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$

Доказательство. 1) Преобразуем левую часть равенства по формуле (18):

$$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta-\alpha+\beta)}{2}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{2}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin\beta\cos\beta}{2}=$$

$=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta;$

2) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+$

$$+\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+$$

$+1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1;$

3) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\,\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}\,\dfrac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

4) $\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha;$$

5) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\sin(90^\circ-\alpha)+\sin\alpha}{\sin(90^\circ-\alpha)-\sin\alpha}=$

$$=\frac{2\sin\frac{90^\circ-\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{90^\circ-\alpha-\alpha}{2}}{2\cos\frac{90^\circ-\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{90^\circ-\alpha-\alpha}{2}}=\frac{\sin 45^\circ\cos(45^\circ-\alpha)}{\cos 45^\circ\sin(45^\circ-\alpha)}=$$

$=\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}(90^\circ-45^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha);$

6) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)}{\sin\alpha}=$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha\ .$$

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Термин «тригонометрия», который происходит от греческих слов «тригон» — *треугольник* и «метрео» — *измеряю* и означает в переводе «измерения треугольников», был предложен в 1595 г. немецким математиком **В. Б. Питиском** (1561—1613).

Тригонометрия, как астрономия и география, зародилась и развивалась в Вавилоне, Египте, Китае, Индии и других странах. Значительного развития тригонометрия как часть астрономии получила в Древней Греции. Греки первыми начали решать прямоугольные треугольники, в связи с чем и составили тригонометрические таблицы. В этих таблицах содержались длины хорд, которые соответствовали центральным углам круга постоянного радиуса. Фактически это были таблицы синусов, поскольку линия синусов равна половине хорды.

Первые тригонометрические таблицы были составлены древнегреческим астрономом и математиком **Гиппархом** (около 150 г. до н. э.). Он ввел также географические координаты — широту и долготу, определил расстояние от Земли до Луны.

Таблицы синусов составляли также индийские астрономы, которые рассматривали и косинус.

Тригонометрические таблицы высокой точности были составлены в XV ст. среднеазиатским ученым ал-Каши (XIV—XV вв.) и немецким астрономом и математиком **Региомонтаном** (1436—1476).

В России первые тригонометрические таблицы, в составлении которых принимал участие **Л. Ф. Магницкий** (1669—1739), были изданы в 1703 г.

Учения о тригонометрических функциях начало развиваться еще в IV—V вв. в работах индийских ученых. Термин «sinus» хотя и был введен на латинском языке в XII в., но перевели его с индийского «архадживе», что означает *половина хорды*.

Термин «косинус» происходит от сокращения двух слов «sinus complementi» — *синус дополнения* ($\sin(90^\circ - x)$), который ввел Региомонтан.

В IX—X вв. среднеазиатские ученые ввели понятия тангенса, котангенса, секанса (величины, обратной косинусу) и косеканса (величины, обратной синусу). Термин «тангенс» был введен в 1583 г. немецким математиком **Т. Финком** (1561—1656). Латинское слово «tangens» означает *тот, что касается.* Термин «котангенс» происходит, как и косинус, от словосочетания «tangens complementi».

Современное учение о тригонометрических функциях отражено в работах **Леонарда Эйлера** (1707—1783) — математика, физика и астронома, швейцарца по происхождению, который долгое время работал в Петербургской Академии наук. Л. Эйлер рассматривал тригонометрию как науку о тригонометрических функциях. Эти функции он трактовал как отношение соответствующих тригонометрических линий к радиусу, что дало возможность рассматривать их не только как функции углов и дуг, но и как функции действительных чисел. Л. Эйлер впервые доступно изложил сведения о знаках тригонометрических функций в каждом из квадрантов, исследовал их области определения, ввел обозначения функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, сторон a, b, c и противоположных им углов A, B, C в треугольнике. Он автор ряда тригонометрических формул.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Доказать формулу сложения для косинуса.

2. Доказать формулу сложения для синуса.

3. Доказать формулу сложения для тангенса.

4. Сформулировать правило пользования формулами приведения.

5. Доказать формулы тригонометрических функций двойного аргумента.

6. Записать формулы тригонометрических функций половинного аргумента.

7. Доказать формулы суммы и разности синусов и косинусов.

8. Доказать формулы суммы и разности тангенсов.

УПРАЖНЕНИЯ

48. Вычислить значение выражения не применяя тригонометрических таблиц и микрокалькулятора:

1) $\cos 15°$;

2) $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$;

4) $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если $\sin x=0{,}6$, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$;

5) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}8$;

6) $\frac{1+\text{tg}\,4^\circ+\text{tg}\,49^\circ}{\text{tg}\,49^\circ-\text{tg}\,4^\circ}$;

7) $\cos^2 22^\circ 30' - \sin^2 22^\circ 30'$;

8) $\text{tg}\,\frac{11}{12}\pi - \text{tg}\,\frac{5}{12}\pi$; 9) $\sin 75^\circ \sin 75^\circ$; 10) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}$.

49. Упростить выражение:

А

1) $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$; 3) $\frac{\sin 11^\circ\cos 15^\circ+\cos 11^\circ\sin 15^\circ}{\sin 18^\circ\cos 12^\circ+\cos 18^\circ\sin 12^\circ}$;

4) $\frac{\text{tg}\,7\alpha-\text{tg}\,3\alpha}{\text{tg}\,7\alpha\,\text{tg}\,3\alpha+1}$; 5) $\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

6) $\sqrt{1+\cos 8\alpha}$; 7) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$; 8) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x$.

Б

9) $\frac{(1-\cos 2\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 10) $\frac{\sin(45^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos(45^\circ-\alpha)\cos(45^\circ+\alpha)}$;

11) $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4\alpha}$; 12) $\frac{\text{tg}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-\text{ctg}\left(\alpha+\frac{13}{2}\pi\right)}{\text{ctg}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\text{tg}\left(\alpha+\frac{13}{2}\pi\right)}$;

13) $(\text{tg}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha)\sin 2\alpha$; 14) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-\text{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$;

15) $\frac{\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}$; 16) $\frac{1-\sin 2\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}$.

В

17) $1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}=\sin^2\frac{\alpha}{4}$;

18) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$;

19) $\sqrt{\left(1-\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\text{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}$;

20) $\dfrac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \sin 6\alpha}{\sin 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha - 1}$;

21) $\sqrt{\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}}$, если $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

22) $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta} - \operatorname{tg}^2\beta$.

50. Записать выражение в виде произведения или дроби

А

1) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$; 2) $1 - \cos\frac{3}{2}\alpha$; 3) $1 + \sin 5\alpha$;

4) $1 - \operatorname{tg}\alpha$; 5) $1 - \sin\alpha - \cos\alpha$; 6) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}3\alpha$.

Б

7) $\dfrac{1+\cos(\alpha-\beta)}{1-\cos(\alpha-\beta)}$; 8) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$;

9) $\sqrt{3} - 2\cos 20^\circ$; 10) $\sqrt{1 + \dfrac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}}$;

11) $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta$; 12) $1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha$.

В

13) $\dfrac{\sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4}$;

14) $\operatorname{ctg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha - 8\cos 4\alpha\operatorname{ctg}4\alpha$;

15) $2 - \dfrac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha}$; 16) $\dfrac{\cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha}{\cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha}$.

51. Доказать тождество:

А

1) $\cos\alpha\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \sin(\alpha+\beta)$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)} = -\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $1 + 2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos^2\alpha\cos 2\alpha$;

4) $2\sin 2\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha + \cos\alpha$;

5) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}2\alpha}{1-\operatorname{ctg}2\alpha} = \dfrac{\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$; 6) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$

Б

7) $\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=-\dfrac{1}{4}\sin 2\alpha$;

8) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

9) $\dfrac{\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)}{4\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;

10) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$;

11) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha+2\sin\alpha\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$;

12) $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

13) $4\sin^2\alpha-3=4\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$;

14) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\alpha$.

В

15) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

16) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\dfrac{1}{2}=-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

17) $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-2\sin 3\alpha\cos 3\alpha=4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha$;

18) $\dfrac{\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha+2\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$;

19) $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$;

20) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta)$;

21) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=-\dfrac{4}{\operatorname{tg}2\alpha\sin 2\alpha}$;

22) $\dfrac{\cos 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha+\sin 4\alpha}=-\operatorname{tg}^2 2\alpha$.

2 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Составление уравнения задачи является основным средством применения математики в естествознании и технике. Без уравнения нет математики как средства познания природы.

П. С. Александров

§ 11 Обратные тригонометрические функции

Понятие об обратной функции. При решении различных задач часто приходится вычислять значение функции по данному значению аргумента. Например, вычислять площадь S квадрата по длине его стороны по формуле $S = a^2$, которая задает зависимость (функцию) площади от длины a стороны квадрата. Однако часто приходится решать обратную задачу: какой длины должна быть сторона квадрата a, чтобы площадь S имела наперед заданное значение $a = \sqrt{S}$, или вычислить время t, затраченное телом при равномерном движении, если оно прошло путь определенной длины. Если $s = s_0 + vt$ (где v — постоянная) — формула пути, которая задает линейную функцию, то $s = f(t)$ — функция аргумента t. Если выразить t из формулы пути, то получим другую функцию $t = \frac{s}{v} - \frac{s_0}{v}$, также линейную, но относительно аргумента s, которую в общем виде обозначим $t = \varphi(s)$. Функцию $a = \sqrt{S}$ называют обратной функции $S = a^2$, а $t = \frac{s}{v} - \frac{s_0}{v}$ — обратной $s = s_0 + vt$.

Рассмотрим примеры нахождения функций, обратных линейной $y = kx + b$ и степенной $y = x^2$ функциям.

Пример 1. Пусть $y = 2x + 3 = f(x)$ — линейная функция. Областью определения и областью значений ее является множество всех действительных чисел. Каждое свое значение y линейная функция принимает только при одном значении аргумента x.

Будем считать переменную y независимой (аргументом), а переменную x — зависимой и решим уравнение $y = 2x + 3$ относительно переменной x. Получим также линейную функцию $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = \varphi(y)$, которая задает другую зависимость x от y.

Функция $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = \varphi(y)$ называется **обратной** функции $y = 2x + 3 = f(x)$.

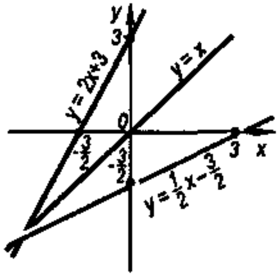

Рис. 53

Поменяем в равенстве $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$ обозначения, т. к. принято независимую переменную обозначать буквой x, а зависимую — буквой y. Получим функцию $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \varphi(x)$, обратную $y = 2x + 3 = f(x)$.

Построим графики функций $y = 2x + 3$ и обратной ей $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ в одной системе координат (рис. 53).

Замечаем, что графики данной функции и обратной ей размещены симметрично относительно прямой $y = x$, т. е. симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Не следует думать, что каждая функция имеет обратную на своей области определения.

Пример 2. Пусть задана функция $y = x^2 = f(x)$. Областью ее определения является множество всех действительных чисел, т. е. R, а областью изменения — множество неотрицательных чисел, т. е. $y \in [0; +\infty)$.

График функции (рис. 54) показывает, что каждое свое значение (кроме $y = 0$) она принимает при двух значениях аргумента x_1 и x_2. Если рассмотреть зависимость x от y, то она не будет функцией, т. к. одному значению y_0 соответствуют два значения x. Это означает, что функция $y = x^2$ на всей области определения не имеет обратной. Однако если рассмотреть подмножества области определения, например $(-\infty; 0]$ или $[0; +\infty)$, то на этих подмножествах функция $y = x^2$ каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента.

На первом из этих подмножеств функция убывает, а на втором — возрастает. На каждом из них существует функция, обратная $y = x^2$.

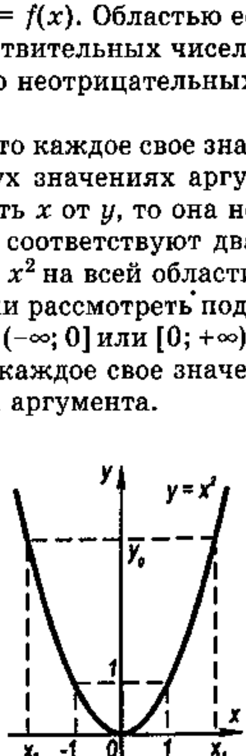

Рис. 54

Найдем, например, функцию, обратную $y = x^2$, если $x \in (-\infty; 0]$, т. е. x — неположительное. Здесь областью определения является множество $(-\infty; 0]$, а областью значений — множество неотрицательных значений y, т. е. $y \in [0; +\infty)$.

Будем считать теперь y независимой переменной, а x — зависимой и решим уравнение $y = x^2$ относительно перемен-

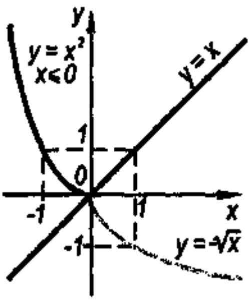

Рис. 55

ной x. Это — квадратное уравнение. Оно имеет два корня $x = \pm\sqrt{y}$. Но по условию x — неположительное, поэтому $x = -\sqrt{y} = \varphi(y)$.

Функция $x = -\sqrt{y} = \varphi(y)$ является обратной функции $y = x^2$ при условии $x \le 0$.

Поменяем в равенстве $x = -\sqrt{y}$ обозначения независимой и зависимой переменных. Получим функцию $y = -\sqrt{x} = \varphi(x)$, обратную $y = x^2$, $x \le 0$.

Областью определения обратной функции $y = -\sqrt{x}$ является множество $[0; \infty)$, т. к. x в арифметическом корне неотрицательное, а областью изменения — множество $(-\infty; 0]$.

Замечаем, что области определения и изменения взаимно обратных функций поменялись «своими» множествами.

Построим графики функций $y = x^2$, $x \le 0$ и $y = -\sqrt{x}$, $x \ge 0$ в одной системе координат (рис. 55). Построенные графики также симметричны относительно прямой $y = x$.

[illegible] f, которая имеет обратную, называет[illegible]

Необходимым и достаточным условием существования обратной для данной функции f является такое: она должна принимать каждое свое значение только для одного значения аргумента.

Достаточным условием существования обратной функции для данной функции является ее монотонность, т. е. возрастание или убывание на всей области определения.

Например, любая линейная функция $y = kx + b$, если $k \ne 0$, является обратимой, т. е. имеет обратную. Обратимой является также функция $y = x^3$, т. к. она возрастающая на всей области определения.

[illegible] обратимой функции $y = f(x)$ на[illegible] функция $x = \varphi(y)$, которая каждо[illegible] y [illegible] значений функции $y = f(x)$ став[illegible] [illegible]единственное число x из ее обл[illegible]

Если поменять обозначения независимой и зависимой переменных, то обратную функцию для $y = f(x)$ запишем в виде $y = \varphi(x)$.

Рассмотрим алгоритм нахождения формулы функции, обратной данной.

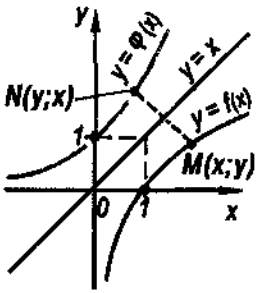

Рис. 56

1) Выясняем, будет ли функция $y = f(x)$ обратимой на всей области определения. Если нет, то выделяем подмножество области определения, где существует функция, обратная $y = f(x)$.

2) Решаем уравнение $y = f(x)$ относительно переменной x, т. е. находим функцию $x = \varphi(y)$, обратную $y = f(x)$.

3) Поменять обозначения переменных: независимую переменную обозначить x, а зависимую — y. Получаем функцию $y = \varphi(x)$, обратную $y = f(x)$ в принятых обозначениях переменных.

Можно доказать общее утверждение:

график функции φ, обратной функции f, симметричен графику f относительно прямой $y = x$.

Доказательство. Если $y = f(x)$ — данная обратимая функция, то $x = \varphi(y)$ — обратная ей. Это означает, что когда точка $M(x; y)$ принадлежит графику $y = f(x)$, то точка $N(y; x)$ принадлежит графику $x = \varphi(y)$ (или $y = \varphi(x)$). Но эти две точки размещены в системе координат симметрично относительно прямой $y = x$ (рис. 56).

Сформулируем без доказательства такое свойство обратной функции:

если функция f возрастающая (убывающая) на промежутке I, то она обратимая. Обратная функция f функция φ, определенная в области значений f, также является возрастающей (убывающей).

Функция, обратная $y = \sin x$. Введем обратную функцию, пользуясь общим алгоритмом нахождения функции, обратной данной.

1) Из свойства периодичности и графика функции $y = \sin x$ (см. рис. 38) следует, что каждое свое значение y_0 она принимает для бесконечного множества значений аргумента $x = x_0 + 2n\pi$. Это означает, что функция не является обратимой на всей области определения. Вместе с тем, на всех промежутках, где она возрастает или убывает, существует обратная ей функция. Выберем такой из промежутков монотонности, значения x в котором ближе всего расположены к 0. Это промежуток

$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Действительно, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то синус принимает все свои значения $y \in [-1;\ 1]$ и возрастает.

2) Будем считать y независимой переменной (аргументом), а x — зависимой (функцией) и решим уравнение $y = \sin x$ относительно x. Это означает, что надо найти такое число x (угол или дугу), синус которого равен y. На выбранном промежутке такое число будет единственным. Для его обозначения используют символ $x = \arcsin y$. Итак, под знаком arcsin содержится значение синуса, а $x = \arcsin y = \varphi(y)$ — функция, обратная $y = \sin x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3) Поменяем обозначения независимой и зависимой переменных. Получим функцию $y = \arcsin x = \varphi(x)$, обратную $y = \sin x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, записанную в принятых обозначениях переменных.

Замечаем, что (как и для любых взаимно обратных функций) области определения и значений этих функций поменялись множествами. Для $y = \arcsin x$ x — значение синуса и $x \in [-1;\ 1]$, а y — число (угол или дуга), синус которого равен x, и $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

График функции $y = \arcsin x$ получим из графика функции $y = \sin x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, преобразованием симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 57).

Рассмотрим свойства функции $\boldsymbol{y = \arcsin x}$.

1) Областью определения функции $y = \arcsin x$ является множество $[-1;\ 1]$, областью значений — множество $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. При этом, если $0 \le x \le 1$, то $0 \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, а если $-1 \le x \le 0$, то $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le 0$.

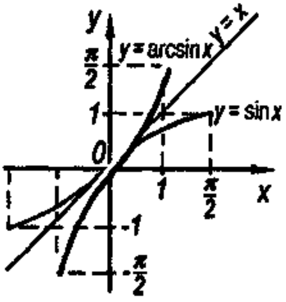

Рис. 57

2) График функции симметричен относительно начала координат (функция нечетная), т. е. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. Доказать это свойство можно так. Область определения — множество, симметричное относительно 0. Докажем, что $f(-x) = -f(x)$. Учитывая область значений арксинуса, имеем $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(-x) \le \frac{\pi}{2}$, т. е. $-\frac{\pi}{2} \le$

$\le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$. Умножив все три части последнего неравенства на -1, получим $-\frac{\pi}{2} \le -\arcsin x \le \frac{\pi}{2}$. Запишем синусы выражений $\arcsin(-x)$ и $-\arcsin x$: $\sin(\arcsin(-x)) = -x$, $\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x$. Но если два числа принадлежат одному и тому же промежутку и синусы их равны, то и числа равны в силу монотонности синуса на этом промежутке. Итак, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

3) Функция не является периодической.

4) Равна нулю при $x = 0$.

5) Возрастающая по теореме о свойстве обратной функции.

6) *Положительная при* $x \in (0;1]$ *и отрицательная при* $x \in [-1;0)$.

7) Принимает наибольшее значение, равное $\frac{\pi}{2}$, если $x = 1$, и наименьшее $-\frac{\pi}{2}$, если $x = -1$.

Если в равенстве $x = \arcsin y$ заменить y на $\sin x$, т. к. $y = \sin x$, то $\arcsin(\sin x) = x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Если от функции $y = \arcsin x$ перейдем к обратной функции $x = \sin y$, а в последнем равенстве заменим y на $\arcsin x$, то получим еще одно равенство $\sin(\arcsin x) = x$.

Равенства $\arcsin(\sin x) = x$ и $\sin(\arcsin x) = x$ используют в различных тригонометрических вычислениях. Согласно этим равенствам: $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\arcsin\left(\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Функция, обратная $y = \cos x$. Из свойства периодичности и графика функции $y = \cos x$ (см. рис. 39) следует, что каждое свое значение y_0 функция принимает для бесконечного множества значений аргумента $x = x_0 + 2n\pi$. Это означает, что функция не является обратимой на всей области определения. Вместе с тем на всех промежутках, где она возрастает или убывает, она имеет обратную функцию. Выберем один из них, например промежуток $[0; \pi]$. При $x \in [0; \pi]$ косинус принимает все свои значения $[-1; 1]$ из области значений.

Будем считать y независимой переменной (аргументом), а x — зависимой (функцией) и решим уравнение $y = \cos x$ относительно переменной x. Это означает, что надо найти такое число x (угол или дугу), косинус которого равен y. На выбранном промежутке такое число единственное и обозначается $x = \arccos y$. Очевидно, что $x = \varphi(y)$. Итак, под знаком arccos содержится значение косинуса, а функция $x = \arccos y$ обратная $y = \cos x$, если $x \in [0; \pi]$.

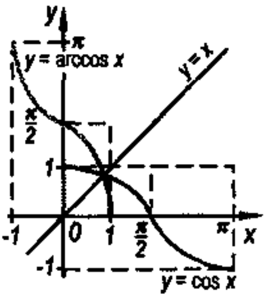

Рис. 58

Поменяем обозначения независимой и зависимой переменных. Получим функцию $y = \arccos x$, обратную $y = \cos x$, если $x \in [0; \pi]$, записанную в принятых обозначениях переменных.

Областью определения функции $y = \arccos x$ является множество $[-1; 1]$, а областью значений — $[0; \pi]$, т. е. $0 \le$ $\le \arccos x \le \pi$.

График функции $y = \arccos x$ получим из графика $y = \cos x$, если $x \in [0;$ $\pi]$, преобразованием симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 58).

Рассмотрим свойства функции $y = \arccos x$, которые следуют из ее графика. Их можно обосновать так же, как и для функции $y = \arcsin x$.

1) Областью определения функции $y = \arccos x$ является множество $[-1; 1]$, а областью значений — множество $[0; \pi]$. Если $0 \le x \le 1$, то $0 \le \arccos x \le \frac{\pi}{2}$; при $-1 \le x \le 0$ $\frac{\pi}{2} \le \arccos x \le \pi$.

2) График функции не симметричен ни относительно начала координат, ни относительно оси Oy. Это означает, что функция не является ни четной, ни нечетной. Для нее выполняется равенство $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ (докажите это самостоятельно).

3) Функция не является периодической.

4) Равна нулю, если $x = 1$.

5) Функция убывающая.

6) Положительная на всей области определения.

7) Функция принимает наибольшее значение π, если $x =$ $= -1$, и наименьшее 0, если $x = 1$.

Для функции $y = \arccos x$ также выполняются равенства $\cos(\arccos x) = x$, $\arccos(\cos x) = x$ для $x \in [0; \pi]$. Обоснуйте это.

Функция, обратная $y = \operatorname{tg} x$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает значения для бесконечного множества значений аргумента $x = x_0 + n\pi$, $n \in Z$. Поэтому она не является обратимой на всей области определения. Но в каждом из промежутков $-\frac{\pi}{2} + n\pi <$ $< x < \frac{\pi}{2} + n\pi$ она возрастает, поэтому имеет обратную. Выберем один из таких промежутков, например $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, значения x в котором ближе всего расположены к 0. Если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то тангенс принимает все свои значения $y \in (-\infty; \infty)$ из области значений.

Будем считать y независимой переменной (аргументом), а x — зависимой переменной (функцией) и решим уравнение $y = \operatorname{tg} x$ относительно x. Это означает, что надо найти такое число (угол или дугу), тангенс которого равен y. На выбранном промежутке это число будет единственным и обозначается $x = \operatorname{arctg} y$. Очевидно, что $x = \varphi(y)$.

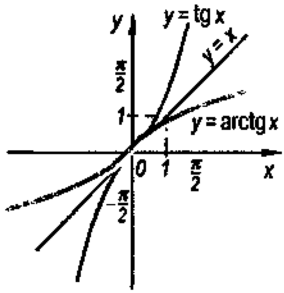

Рис. 59

Итак, под знаком arctg содержится значение тангенса, а функция $x = \operatorname{arctg} y$ обратная $y = \operatorname{tg} x$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поменяем обозначения независимой и зависимой перменных. Получим функцию $y = \operatorname{arctg} x = \varphi(x)$, обратную $y = \operatorname{tg} x$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, записанную в принятых обозначениях переменных.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ получим из графика $y = \operatorname{tg} x$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, преобразованием симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 59).

Рассмотрим свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$, вытекающие из ее графика.

1) Областью определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ является множество $(-\infty; +\infty)$, областью значений — множество $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Если $0 \le x < +\infty$, то $0 \le \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, если $-\infty < x \le 0$, то $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x \le 0$.

2) График функции симметричен относительно начала координат, это означает, что функция нечетная, т. е. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ (докажите это самостоятельно).

3) Функция не является периодической.

4) Равна нулю, если $x = 0$.

5) Функция возрастающая.

6) Положительная, если $0 < x < +\infty$, и отрицательная, если $-\infty < x < 0$.

7) Функция не достигает наибольшего и наименьшего значений. Для функции $y = \operatorname{arctg} x$ выполняются два равенства $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Обоснуйте это.

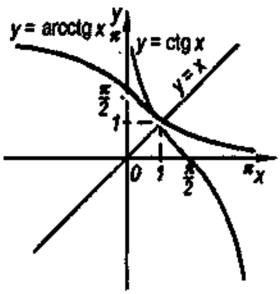

Рис. 60

Функция, обратная $y = \mathrm{ctg}\, x$. Функция $y = \mathrm{ctg}\, x$ не является обратимой на области определения, но имеет обратную на промежутках убывания. Выберем один из них, например $(0; \pi)$. Если $x \in (0; \pi)$, котангенс принимает все свои значения $y \in (-\infty; +\infty)$.

Решим уравнение $y = \mathrm{ctg}\, x$ относительно переменной x. Получим функцию $x = \mathrm{arcctg}\, y = \varphi(y)$, обратную $y = \mathrm{ctg}\, x$, если $x \in (0; \pi)$.

Поменяем обозначения переменных. Получим функцию $y = \mathrm{arcctg}\, x = \varphi(x)$, обратную $y = \mathrm{ctg}\, x$, если $x \in (0; \pi)$, записанную в принятых обозначениях.

Областью определения функции $y = \mathrm{arcctg}\, x$ является множество $(-\infty; +\infty)$, областью значений — множество $(0; \pi)$.

График функции на промежутке $(0; \pi)$ получим из графика $y = \mathrm{ctg}\, x$, симметрично отобразив его относительно прямой $y = x$ (рис. 60).

Назовите свойства функции $y = \mathrm{arcctg}\, x$ по ее графику.

Примеры. Вычислить:

1) $\arcsin \frac{1}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3) $\mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3})$; 4) $\mathrm{arcctg}\, 1$;

5) $\arcsin 0{,}8192$;

6) $2 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arccos \frac{1}{2}$;

7) $\mathrm{arcctg}\, 0 + \mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

8) $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right)$; 9) $\cos(\arccos 1)$;

10) $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

Р е ш е н и е . 1) $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, т. к. $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, т. к. $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; 3) $\mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3}) = -\mathrm{arctg}\,\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$; т. к. $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\mathrm{arctg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; 4) $\mathrm{arcctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$, т. к. $\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4} = 1$; 5) $\arcsin 0{,}8192 \approx 0{,}9599$, т. к. по таблицам значений тригоно-

метрических функций углов, выраженных в радианах или вычисленных на микрокалькуляторе, синус числа 0,9599 равен 0,8192; 6) $2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arccos\frac{1}{2} = 2\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) - \arccos\frac{1}{2} = 2\pi - 2\arccos\frac{1}{2} - \arccos\frac{1}{2} = 2\pi - 3\arccos\frac{1}{2} = 2\pi - 3\cdot\frac{\pi}{3} = \pi$; 7) $\operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0 - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$, т. к. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$; 8) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$ согласно равенству $\arcsin(\sin x) = x$; 9) $\cos(\arccos 1) = 1$ согласно равенству $\cos(\arccos x) = x$; 10) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$ согласно равенству $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$.

Значения обратных тригонометрических функций на микрокалькуляторе вычисляют, соответственно, по таким программам:

x $\boxed{\text{F}}$ $\underline{\sin^{-1}}$; x $\boxed{\text{F}}$ $\underline{\cos^{-1}}$; x $\boxed{\text{F}}$ $\underline{\text{tg}^{-1}}$.

В зависимости от того, в каком измерении (градусном или радианном) мы будем вычислять значение обратной тригонометрической функции, устанавливается соответствующее положение переключателя «Г—Р».

Аргумент x при этом находится в промежутке $0 \le x \le 1$ для арксинуса и арккосинуса и $0 \le x \le 500$ — для арктангенса.

Пример 1. Вычислить arcsin 0,75 с точностью до 10^{-2} в градусной мере.

Предварительно устанавливаем переключатель «Г—Р» на режим работы в градусной мере и вычисляем значение arcsin 0,75.

Программа. 0,75 $\boxed{\text{F}}$ $\underline{\sin^{-1}}$.

Ответ. $\arcsin 0{,}75 \approx 48{,}59^\circ$.

Пример 2. Вычислить с точностью до 10^{-3} в радианной мере arccos 0,578.

Устанавливаем переключатель «Г—Р» на режим работы в радианной мере и вычисляем искомое значение по программе:

0,578 $\boxed{\text{F}}$ $\underline{\cos^{-1}}$.

Ответ. $\arccos 0{,}578 \approx 0{,}955$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какая функция называется обратимой?

2. Сформулировать определение функции, обратной данной обратимой функции.

3. Как расположены графики двух взаимно обратных функций?

4. Сформулировать алгоритм нахождения формулы функции, обратной к данной. Найти функцию, обратную функции: а) $y = 2x - 1$; б) $y = x^2$, если $0 \le x < +\infty$; в) $y = x^3$.

5. Сформулировать теорему о свойствах обратной функции.

6. Найти функцию, обратную $y = \sin x$. Назвать ее свойства.

7. Найти функцию, обратную $y = \cos x$. Назвать ее свойства.

8. Найти функцию, обратную $y = \mathrm{tg}\, x$. Назвать ее свойства.

9. Как построить графики обратных тригонометрических функций?

10. Доказать, что функции $y = \arcsin x$ и $y = \mathrm{arctg}\, x$ нечетные.

11. Как выразить $\arccos(-x)$ через $\arccos x$?

12. Вычислить значение выражения:

1) $\arcsin 1$; 2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

4) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}$; 5) $\arccos 0{,}7986$; 6) $2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin 1$;

7) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin\frac{1}{2}$; 8) $\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$;

9) $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$; 10) $\mathrm{ctg}\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{2}{5}\right)\right)$.

УПРАЖНЕНИЯ

52. Вычислить:

1) $\arccos\frac{1}{2}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\mathrm{arctg}\, 1$;

5) $\arcsin\frac{1}{2}$; 6) $\mathrm{arctg}(-1)$; 7) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

8) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{5}\right)\right)$; 9) $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{7}\right)$.

53. Определить знак числа, если:

1) $a = \sin(\arccos x)$; 2) $b = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \mathrm{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

54. Доказать, что:

1) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$.

55. Найти область определения функции:

1) $y = \arccos(x^2 + 1)$; 2) $\arcsin\frac{3x-1}{3}$.

56. Построить график функции:

1) $y = \arccos\frac{1}{2}x$; 2) $y = -2\arcsin x$;

3) $y = \arcsin|x|$; 4) $y = |\arccos x|$.

§ 12. Решение простейших тригонометрических уравнений

Тригонометрическими уравнениями называются уравнения, в которых неизвестное (переменная) входит только под знак тригонометрической функции.

Например, $\sin x - \cos x = 0$; $2\sin x + \cos x = \frac{3}{2}\sin^2 2x$; $\cos 4x \cos 2x = \cos 5x \cos x$; $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

Тригонометрические уравнения, у которых неизвестная входит только под знак тригонометрической функции, или совсем не имеют решений, или имеют их чаще всего бесконечное множество вследствие свойства периодичности тригонометрических функций.

Не существует общего метода решения любого тригонометрического уравнения. Однако некоторые способы решения отдельных видов тригонометрических уравнений можно указать. Как правило, решение любого тригонометрического уравнения сводится к решению простейших уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$, поэтому нет необходимости рассматривать его в отдельности.

Рассмотрим решение простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение $\sin x = a$. Решим это уравнение сначала графически, построив в одной системе координат графики функций $y = \sin x$ и $y = a$.

Если $|a| > 1$, т. е. при $a > 1$ и $a < -1$, прямая и синусоида не пересекаются. Поэтому уравнение $\sin x = a$ не имеет решений (рис. 61).

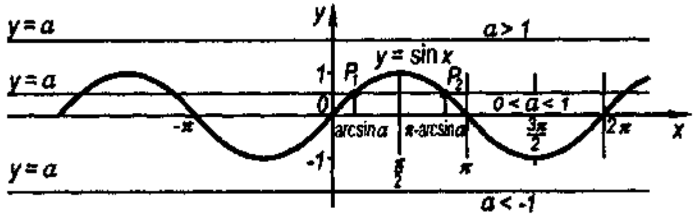

Рис. 61

Найдем решения, если $|a| \leq 1$, т. е. $-1 \leq a \leq 1$, на отрезке $[-\pi; \pi]$, а потом воспользуемся периодичностью функции синус.

Пусть $0 < a < 1$. Как видно из рисунка 61, прямая $y = a$ в этом случае пересекает синусоиду в двух точках P_1 и P_2, абсциссы которых принадлежат промежутку $(0; \pi)$.

Поскольку решение уравнения $\sin x = a$ сводится к нахождению числа (геометрически угла или дуги), синус которого равен a, то этим числом является $\arcsin a$, если оно принадлежит промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, абсциссой точки P_1 является $\arcsin a$. Абсциссу точки P_2 запишем как разность $\pi - \arcsin a$.

Если прибавить к найденным решениям период $2n\pi$, то при $0 < a < 1$ получим все решения уравнения $\sin x = a$ в виде двух множеств:

$$x = \arcsin a + 2n\pi,\ n \in Z; \qquad (1)$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2n\pi = -\arcsin a + (2n + 1)\pi,\ n \in Z. \qquad (2)$$

Эти множества можно объединить в одно

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in Z, \qquad (3)$$

получив общую формулу решения уравнения $\sin x = a$. Если k четное, т. е. $k = 2n$, получим множество (1), а если нечетное, т. е. $k = 2n + 1$, получим множество (2).

Пусть $-1 < a < 0$. Из рисунка 62 видно, что при этом условии прямая $y = a$ пересекает синусоиду также в двух точках P_1 и P_2, абсциссы которых принадлежат промежутку $(-\pi; 0)$. Абсцисса первой точки принадлежит промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, поэтому является $\arcsin a$. Абсциссу точки P_2 можно записать как разность $-\pi - \arcsin a$. Если к найденным значениям прибавить период функции синуса, то получим все решения уравнения $\sin x = = a$, если $-1 < a < 0$, в виде двух множеств:

$$x = \arcsin a + 2n\pi,\ n \in Z,$$

$$x = -\pi - \arcsin a + 2n\pi = -\arcsin a + (2n-1)\pi,\ n \in Z.$$

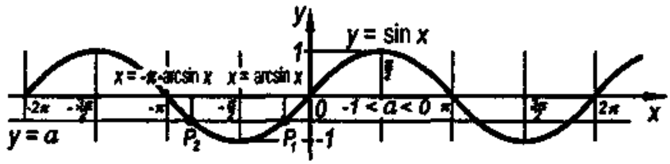

Рис. 62

Объединяя эти две формулы в одну, запишем:

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in Z.$$

Получили ту же формулу решения уравнения.

Если $a = 0$, то прямая $y = a$ пересекает синусоиду в точках, абсциссы которых равны $n\pi$. Итак, уравнение $\sin x = 0$ имеет множество решений $x = n\pi$, где $n \in Z$.

Если $a = 1$, то прямая касается синусоиды в точках с абсциссами $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Таким образом, уравнение $\sin x = 1$ имеет множество решений $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in Z$.

Если $a = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in Z$.

Нетрудно доказать, что когда $a = 0$, $a = 1$ и $a = -1$, те же множества решений можно найти и по общей формуле (3).

Общую формулу решений уравнения $\sin x = a$, если $|a| \le 1$, можно найти и с помощью единичной окружности.

Пусть $0 < a < 1$. Т. к. a как значение синуса является ординатой точки единичной окружности, то отложим на оси Oy отрезок, равный a, и через конец его A проведем прямую, параллельную оси Ox (рис. 63). Она пересечет окружность в двух точках P_1 и P_2. Поскольку надо найти такое число (угол или дугу), синус которого равен a, то таких чисел, которым соответствуют точки P_1 и P_2 единичной окружности, оказалось два. Первое из них принадлежит промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и является $\arcsin a$, а второе, равное $\pi - \arcsin a$. Учитывая периодичность функции синус, получим два множества решений уравнения $\sin x = a$, если $0 < a < 1$:

$$x = \arcsin a + 2n\pi,\ n \in Z,$$

$$a = \pi - \arcsin a + 2n\pi = -\arcsin a + (2n + 1)\pi.$$

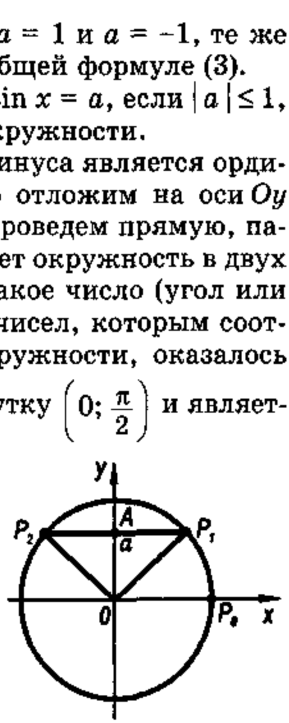

Рис. 63

После их объединения получим общую формулу решений

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in Z.$$

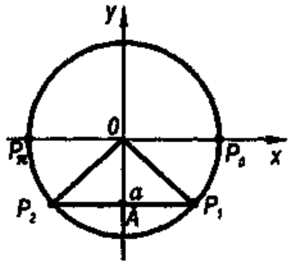

Рис. 64

Пусть $-1 < a < 0$. Соответствующие точки P_1 и P_2, изображающие числа на единичной окружности, принадлежат нижней полуокружности (рис. 64). Точка P_1 изображает число, которое принадлежит промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, и является $\arcsin a$. Точка P_2 изображает число, равное $-\pi, -\arcsin a$.

Учитывая периодичность синуса, получим два множества решений уравнения $\sin x = a$, если $-1 < a < 0$:

$$x = \arcsin a + 2n\pi,\ n \in Z,$$

$$x = -\pi - \arcsin a + 2n\pi = -\arcsin a + (2n - 1)\pi.$$

Объединяя их, получим общую формулу решений уравнения

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in Z.$$

Уравнение $\cos x = a$. Решение его графическим способом показывает (рис. 65), что при $|a| > 1$ уравнение не имеет решений. Найдем решения уравнения на промежутке $[-\pi; \pi]$, длина которого равна периоду 2π.

Пусть $0 < a < 1$. Проведем прямую $y = a$. Она пересечет график функции $y = \cos x$ на промежутке $[-\pi; \pi]$ в двух точках P_1 и P_2. Надо найти такое число (угол или дугу), косинус которого равен a. Таких чисел, которым соответствуют точки P_1 и P_2, оказалось два. Первое из них принадлежит промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и является $\arccos a$, а второе — противоположное ему и равно $-\arccos a$ вследствие четности функции косинус. Учитывая периодичность функции косинус, получим два множества решений уравнения $\cos x = a$, если $0 < a < 1$:

$$x = \pm \arccos a + 2n\pi,\ n \in Z. \tag{4}$$

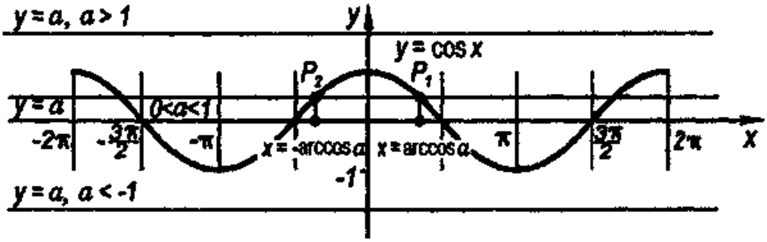

Рис. 65

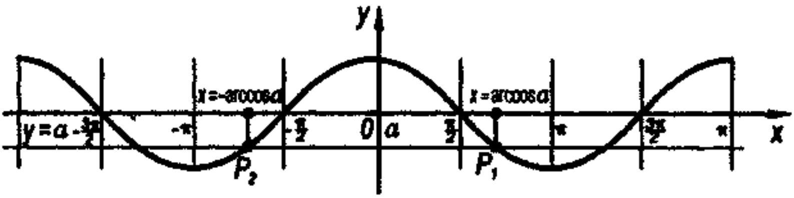

Рис. 66

Пусть $-1 < a < 0$. Из рисунка 66 видно, что прямая $y = a$ пересекает график косинуса в двух точках P_1 и P_2. Абсцисса точки P_1 принадлежит промежутку $(0; \pi)$, и поэтому равна $\arccos a$, абсцисса второй точки P_2 равна $-\arccos a$. Прибавляя к найденным решениям период $2n\pi$, получим два множества решений, которые можно записать в виде одной формулы

$$x = \pm \arccos a + 2n\pi, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Таким образом, получим ту же общую формулу (4) решений уравнения $\cos x = a$, если $-1 < a < 0$.

Если $a = 0$, прямая $y = a$ пересекает график косинуса в точках с абсциссами $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Если $a = 1$, прямая касается графика косинуса в точках с абсциссами $2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$, если $a = -1$, касается в точках с абсциссами $(2n + 1)\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Целесообразно запомнить «особую» формулу записи решений уравнений $\cos x = a$ для отдельных случаев:

$$\text{если } \cos x = 0, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\text{если } \cos x = 1, \text{ то } x = 2n\pi, n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\text{если } \cos x = -1, \text{ то } x = (2n + 1)\pi.$$

Нетрудно показать, что эти же множества решений для отдельных значений a можно получить из общей формулы решений $x = \pm \arccos a + 2n\pi$. Действительно, если

$$a = 0, \arccos a = \frac{\pi}{2}, \text{ а } x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi = (4n \pm 1)\frac{\pi}{2}, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Однако выражение $4n \pm 1$, если $n \in \boldsymbol{Z}$, дает множество всех нечетных чисел, как и выражение $2n + 1$, входящее в формулу $x = \frac{\pi}{2} + n\pi = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$.

Общую формулу решения уравнения $\cos x = a$, если $|a| \le 1$, с помощью единичой окружности можно вывести так же, как и для уравнения $\sin x = a$.

Как видно из рисунка 67, если $0 < a < 1$, прямая, проведенная в конце A отрезка оси абсцисс длиной a параллельно оси Oy, пересекает окружность в двух точках P_1 и P_2. Точка P_1

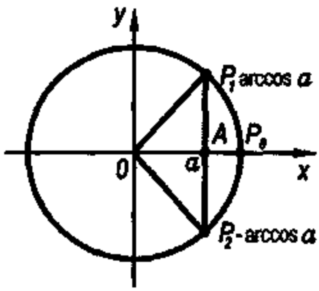

Рис. 67

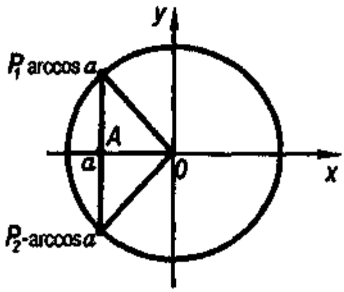

Рис. 68

соответствует числу, которое принадлежит промежутку $(0; \pi)$, т. е. $\arccos a$, вторая точка P_2 соответствует числу $-\arccos a$ вследствие четности функции косинус. Прибавляя период к обоим числам, получим общую формулу (4) решения уравнения $\cos x = a$, если $0 < a < 1$:

$$x = \pm \arccos a + 2n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Если $-1 < a < 0$, прямая, проведенная в конце отрезка OA параллельно оси Oy, также пересекает окружность в двух точках P_1 и P_2 (рис. 68). Точка P_1 соответствует числу, которое принадлежит промежутку $(0; \pi)$, т. е $\arccos a$, а P_2 соответствует числу $-\arccos a$. Прибавляя период к обоим числам, снова получим ту же общую формулу решений уравнения $\cos x = a$.

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$. Поскольку областью значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество всех действительных чисел, то найдем решения уравнения при любом a на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, длина которого равна периоду π, а потом воспользуемся периодичностью функции тангенса.

Графический способ решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ (рис. 69) показывает, что на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ прямая $y = a$ пересекает график тангенса только в одной точке с абсциссой $\operatorname{arctg} a$. Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, получим общую формулу решений уравнения $\operatorname{tg} x = a$, т. е. множество

$$x = \operatorname{arctg} a + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (5)$$

Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ с помощью единичной окружности на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ приводит к тому же множеству. Т. к. $\operatorname{tg} \alpha$ — это ордината точки T_α пересечения прямой OP_α с линией тангенса (рис. 70), а прямая OT_α пересекает еди-

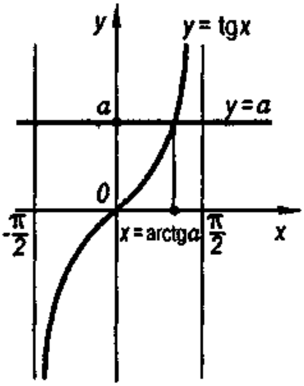

Рис. 69

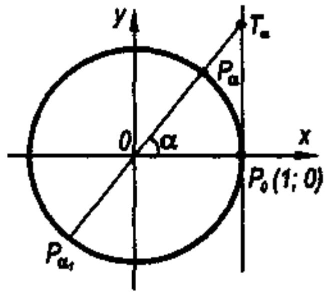

Рис. 70

ничную окружность в двух точках P_α и P_{α_1}, то в интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ попадает только одна из них P_α, которая соответствует числу $\operatorname{arctg} a$. Все другие решения получим, прибавив к этому числу период $n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, т. е. $x = \operatorname{arctg} a + n\pi$.

Таким образом, имеем общие решения трех простейших тригонометрических уравнений:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin x = a,\ x = (-1)^n \arcsin a + n\pi,\ n \in \mathbf{Z},\\ \cos x = a,\ x = \pm \arccos a + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z},\\ \operatorname{tg} x = a,\ x = \operatorname{arctg} a + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.\end{gathered}}$$

Покажем применение этих формул.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Т. к. значение синуса, по условию, отрицательное, то $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ выбираем на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Поэтому $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, а по формуле (3) $x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right) + k\pi = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. Т. к. значение синуса, по условию, положительное, то $\arcsin\frac{1}{2}$ выбираем на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, поэтому, по формуле (3), $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Р е ш е н и е. Т. к. значение косинуса, по условию, положительное, то $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ выбираем из промежутка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Итак, по формуле (4), $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 4. Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Т. к. значение косинуса, по условию, отрицательное, то $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ выбираем из промежутка $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Итак, по формуле (4), $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, поэтому $x =$

$= \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 5. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Р е ш е н и е. Т. к. значение тангенса, по условию, положительное, то $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$ выбираем из промежутка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, поэтому, по формуле (5), $x = \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 6. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = -1$.

Р е ш е н и е. Т. к. значение тангенса, по условию, отрицательное, то $\operatorname{arctg}(-1)$ выбираем из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Итак, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, поэтому, по формуле (5), $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$,

$n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 7. Решить уравнение $\cos x = -0{,}3257$.

Р е ш е н и е. Т. к. значение косинуса, по условию, отрицательное, то $\arccos(-0{,}3257)$ выбираем из промежутка $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. По формуле (4), используя таблицы или микрокалькулятор, имеем:

$$x = \pm 1{,}9044 + 2n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

К решению простейших тригонометрических уравнений непосредственно приводят решения тригонометрических уравнений вида $\sin(kx + \varphi) = a$, $\cos(kx + \varphi) = a$, $\operatorname{tg}(kx + \varphi) = a$. Формулы (3)—(5) применяют для нахождения выражения $(kx + \varphi)$, а после этого находят x из полученного уравнения.

Пример 8. Решить уравнение $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Р е ш е н и е . По формуле (3), $2x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\pi$, $2x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 9. Решить уравнение $\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е . По формуле (4), $\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$; $\frac{2}{3}x = \pm\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2n\pi$; $x = \pm\pi + \frac{\pi}{4} + 3n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какое уравнение называют тригонометрическим?

2. Какая особенность решений тригонометрических уравнений?

3. Вывести формулы решений уравнений: $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\mathrm{tg}\, x = a$.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

57. Решить уравнение:

1) $\sin x = 0$; 2) $\cos x = -0{,}4827$; 3) $\mathrm{tg}\, x = 0$; 4) $\mathrm{tg}\, x = -0{,}5$;

5) $\cos x = 0$; 6) $\sin 2x = -1$; 7) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

8) $\sin\left(\frac{x}{2} - 30^\circ\right) + 1 = 0$; 9) $\cos x = \frac{1}{2}$; 10) $2\cos 3x - 1 = 0$;

11) $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$; 12) $3\,\mathrm{tg}\,(x + 1) - \sqrt{3} = 0$; 13) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

14) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 1 = 0$; 15) $\mathrm{tg}\, x = -0{,}6009$;

16) $3\mathrm{tg}^2\, 2x - 1 = 0$; 17) $\sin x = 0{,}2753$; 18) $2\sin^2 3x - 3 = 0$.

§ 13. Некоторые способы решения тригонометрических уравнений, отличных от простейших

Рассмотрим отдельно способы решения некоторых тригонометрических уравнений на примере одного уравнения и постараемся обосновать целесообразность использования каждого из них.

Решим уравнение

$$\sin x - \cos x = 0. \qquad (1)$$

1. Способ приведения к одной тригонометрической функции (алгебраический способ). Этим способом решают уравнения, в состав которых входят разные тригонометрические функции одного и того же аргумента. Используя основные тригонометрические тождества, все функции уравнения выражают через одну функцию, а затем решают алгебраическое уравнение относительно этой функции.

Итак, перенесем $\cos x$ в правую часть уравнения и выразим его через $\sin x$ по формуле $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$. Получим уравнение

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}. \qquad (2)$$

Возведем обе части уравнения (2) в квадрат. Получим $\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$, или $2\sin^2 x = 1$, откуда $\sin^2 x = \frac{1}{2}$. Извлечем квадратный корень из обеих частей уравнения, используя тождество $\sqrt{a^2} = |a|$. Имеем $|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решим два простейших тригонометрических уравнения:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi,$$

$$\text{или } x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + n\pi,$$

$$\text{или } x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right) + n\pi = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Т. к. мы выполняли возведение обеих частей уравнения (2) в квадрат, то возможны нарушения равносильности, т. е. уравнение $\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$, а следовательно, и $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ могут иметь посторонние решения.

Чтобы отбросить посторонние решения, сделаем проверку на отрезке длиной 2π, в частности на $[0; 2\pi]$, учитывая, что наименьшим положительным периодом синуса и косинуса является число 2π. Для этого удобно использовать единичную окружность.

Нанесем на единичную окружность все точки, которые соответствуют числам, содержащимся в найденных сериях решений (рис. 71).

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ и}$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Первая формула, если $k = 0, \pm 1, \pm 2$, дает точки $P_{\frac{\pi}{4}}$, $P_{\frac{3\pi}{4}}$.

Вторая формула, если $k = 0, \pm 1, \pm 2$, дает точки $P_{\frac{7\pi}{4}}$, $P_{\frac{5\pi}{4}}$.

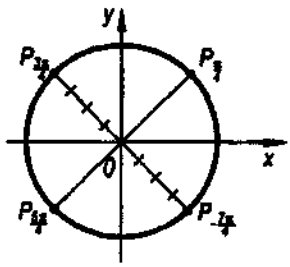

Рис. 71

Подставим каждое из найденных чисел в данное уравнение:

если $x = \frac{\pi}{4}$, то $\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, $0 = 0$;

если $x = \frac{3\pi}{4}$, то $\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \neq 0$;

если $x = \frac{7\pi}{4}$, то $\sin\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \neq 0$;

если $x = \frac{5\pi}{4}$, то $\sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$, $0 = 0$.

Итак, данному уравнению удовлетворяют лишь решения двух множеств:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z} \text{ и } x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Их можно записать одной формулой, если преобразовать вторую формулу таким образом:

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi = \frac{\pi}{4} + \pi + 2n\pi = \frac{\pi}{4} + (2n + 1)\pi.$$

В первой серии к $\frac{\pi}{4}$ прибавляют число $2n\pi$, а во второй — $(2n+1)\pi$. Четные и нечетные числа образуют множество целых чисел. Поэтому объединенная формула решений будет иметь вид:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Способом приведения к одной функции можно решать, например, такие уравнения:

$$6\cos^2 x - 5\sin x + 5 = 0,\ \operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3,$$

$$\cos^2 x + 2\sin^2 x - \cos x = 0 \text{ и др.}$$

2. Способ разложения на множители. При решении тригонометрических уравнений этим способом все члены уравнения переносят в левую часть и представляют полученное выражение в виде произведения. Далее используют необходимое и достаточное условие равенства нулю произведения тригонометрических выражений: произведение двух или нескольких сомножителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысла.

В данном уравнении (1) все члены содержатся в левой части. Запишем $\cos x$ через $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и применим формулу разности синусов $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$; $2\cos\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\sin\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = 0$.

Отсюда $2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Поскольку $2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$, то $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Итак, $x - \frac{\pi}{4} = k\pi$, а $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Получили то же множество решений, что и при решении первым способом, но коротким путем. Кроме того, при решении не было нарушения равносильности уравнений, поэтому проверка не нужна.

3. Способ решения однородных уравнений. Этот способ применяют при решении однородных тригонометрических уравнений, т. е. таких, у которых левая часть является многочленом, в каждом члене которого сумма показателей степеней синуса и косинуса одного и того же аргумента одинакова, а правая — ноль. В общем случае однородное тригонометрическое уравнение можно записать так:

$$a\sin^n x + b\sin^{n-1} x\cos x + \ldots + m\sin x\cos^{n-1} x + l\cos^n x = 0,\ a \neq 0.$$

Однородное уравнение n-й степени относительно синуса и косинуса решают делением обеих частей на $\cos^n x$, предварительно доказав, что $\cos x \neq 0$. Используем для этого метод доказательства от противного. Предположим, что $\cos x = 0$. Тогда, подставляя в данное уравнение вместо $\cos x$ число 0, получим $a\sin^n x = 0$, отсюда $\sin x = 0$. А это противоречит свойствам синуса и косинуса одного и того же аргумента, поскольку если $\cos x = 0$, то $\sin x = 1$. Разделив на $\cos^n x \neq 0$ обе части однородного уравнения, получим алгебраическое относительно функции тангенса уравнение $a\operatorname{tg}^n x + b\operatorname{tg}^{n-1} x + \ldots + m\operatorname{tg} x + l = 0$.

Данное уравнение $\sin x - \cos x = 0$ однородное. Докажем, что $\cos x \neq 0$. Это так, потому что если $\cos x = 0$, то должно выполняться равенство $\sin x = 0$, а это невозможно для одного и того же аргумента.

Разделим обе части уравнения на $\cos x \neq 0$. Получим $\operatorname{tg} x - 1 = 0$, или $\operatorname{tg} x = 1$, отсюда $x = \operatorname{arctg} 1 + k\pi$, или $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Не следует думать, что при решении однородных уравнений всегда можно делить на $\cos^n x$. Например, если в уравнении $a\cos^2 x + b\sin x\cos x = 0$ разделить обе части на $\cos^2 x$, то можно потерять серию решений $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Причина состоит в том, что в этом уравнении $\cos x$ может быть равен нулю, поэтому его надо решать способом разложения на множители $\cos^2 x(a + b \operatorname{tg} x) = 0$ и т. д.

4. Способ введения вспомогательного аргумента. Запишем данное уравнение в виде $\sin x - 1 \cdot \cos x = 0$. Заменим 1 на $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$. Получим $\sin x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cos x = 0$, $\sin x - \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} \cos x = 0$. Умножим обе части уравнения на $\cos \frac{\pi}{4} \neq 0$. Получим $\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos x = 0$, или $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Отсюда $x - \frac{\pi}{4} = k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Способ введения вспомогательного аргумента применяют при решении линейных тригонометрических уравнений, какими называются уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$. Уравнение $\sin x - \cos x = 0$ является отдельным видом линейного.

Рассмотрим в общем случае решения линейного тригонометрического уравнения способом введения вспомогательного аргумента. Вынесем за скобки из левой части уравнения $\sqrt{a^2 + b^2}$. Получим

$$\sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = c.$$

Очевидно, что $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$ и $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$. Кроме того, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. Это означает, что когда $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, будем иметь $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$.

Подставим в предыдущее уравнение эти выражения. Получим:

$$\sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x) = c, \text{ или}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(x + \varphi) = c,\ \sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

При условии, что $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$ или $c^2 \le a^2 + b^2$, последнее тригонометрическое уравнение имеет решение:

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + k\pi,$$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + k\pi,$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, т. к. $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Итак, перед решением линейного тригонометрического уравнения надо проверить, выполняется ли условие $c^2 \le a^2 + b^2$. Зафиксируем полученную формулу при решении данного уравнения:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi). \qquad (3)$$

Будем пользоваться ею при решении других задач, связанных с тригонометрическими функциями.

Применяя этот способ решения, в частности формулу (3), к уравнению $\sin x - \cos x = 0$, получим $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, потому что $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Отсюда $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $x - \frac{\pi}{4} = n\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Линейное тригонометрическое уравнение можно решить еще несколькими способами. В частности, можно привести его к однородному, введя замену $1 = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}$ как множитель c и заменив $\sin x$ и $\cos x$ по формулам двойного аргумента: $\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

Можно также заменить $\sin x$ и $\cos x$ на тангенс половинного угла по формулам:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

5. Способ возведения в квадрат. Уравнение (1) можно решить способом возведения обеих частей в квадрат. Итак,

$$(\sin x - \cos x)^2 = 0,\ \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 0,$$

$$1 - \sin 2x = 0,\ \sin 2x = 1,\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

В этом случае возведение в квадрат не влечет за собой появления посторонних корней.

6. Графический способ. Запишем данное уравнение в виде $\sin x = \cos x$ и введем функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Построив в одной системе координат графики этих функций, найдем решения уравнения как абсциссы точек их пересечения (рис. 72).

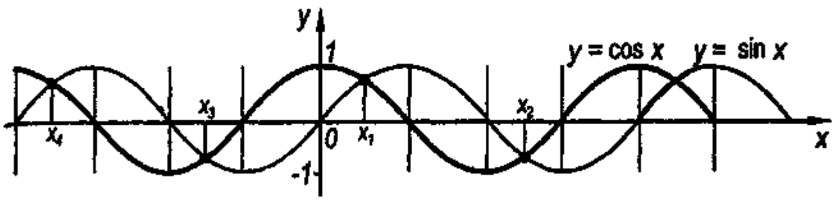

Рис. 72

Сравнивая рассмотренные способы решения уравнения $\sin x - \cos x = 0$, нетрудно сделать вывод, что наименее рациональным является первый (алгебраический) способ, который приводит к появлению посторонних решений и требует проверки.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Назвать способы решения отдельных видов тригонометрических уравнений.

2. Какие тригонометрические уравнения называют однородными?

3. Как решаются однородные тригонометрические уравнения?

4. Какие тригонометрические уравнения называют линейными? Когда существуют решения таких уравнений?

5. Как решаются линейные тригонометрические уравнения?

УПРАЖНЕНИЯ

58. Решить уравнение:

А

1) $\cos x + \sin x = 0$; 2) $\cos 2x \cos x = \sin 2x \sin x$;
3) $\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$; 4) $\cos 2x = 2\sin^2 x$;
5) $\sin 2x = \cos x \cos 2x$; 6) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
7) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; 8) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$;
9) $\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$; 10) $\sin^2 x - \sqrt{3} \cos x \sin x = 0$;
11) $\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$; 12) $8\sin x - 7\cos x = 0$;
13) $2\sin^2 x - \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$; 14) $2\cos x + 3 = 4\cos \frac{x}{2}$.

Б

15) $3\mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = 1$; 16) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$;

17) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$; 18) $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \sin\frac{x}{2}$;

19) $1 - \cos(\pi - x) + \sin\frac{\pi+x}{2} = 0$; 20) $3\sin x - 3\cos x = 5$;

21) $1 + \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = 0$; 22) $4\sin x + 5\cos x = 4$;

23) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\operatorname{tg} x$;

24) $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 5 - 6\cos^2 x$;

25) $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$; 26) $(1 + \cos x)\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$;

27) $2\sin^2 x + 2\sin x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$;

28) $9\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 7$;

29) $12\cos x - 5\sin x = -13$;

30) $\sin^3\frac{x}{2} + 3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 4\cos^3\frac{x}{2} = 0$.

B

31) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = 0$;

32) $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$;

33) $\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x - 2\operatorname{tg} 2x = 0$;

34) $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{2}\sin 2x$;

35) $1 + \cos 10x\cos 6x = 2\cos^2 8x + \sin^2 8x$;

36) $\sin 2x - 3\cos 2x = 3$;

37) $\sin^4 x + \cos^4 x - \sin x\cos x = 0$;

38) $\frac{\sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 1$; 39) $\sqrt{\sin^2 x - 1} + \sqrt{1 - \sin^2 x} = 0$;

40) $\frac{1}{\cos x} = \cos x + \sin x$; 41) $2\sin^3 x = \cos x$;

42) $\sin x + \cos x = 1 - \sin 2x$; 43) $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 1$;

44) $\frac{\cos x}{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{2\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}\right)$.

§ 14. Примеры решений некоторых других видов тригонометрических уравнений, систем уравнений

Рассмотрим пример уравнения, решение которого требует исключения посторонних решений.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin 2x\operatorname{tg} 3x\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Р е ш е н и е. Приравняв к нулю каждый из сомножителей, решим полученные уравнения, а из найденных решений исключим те, при которых другие сомножители теряют смысл:

$$\sin 2x = 0,\ 2x = k\pi,\ x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z},$$

$$\operatorname{tg} 3x = 0,\ 3x = n\pi,\ x = n\frac{\pi}{3},\ n \in \mathbf{Z},$$

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{3}\right) = 0,\ \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{3} = m\pi,$$

$$-x + \frac{5\pi}{6} = m\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + p\pi,\ p \in \mathbf{Z},\ p = -m.$$

Поскольку синус существует для любых аргументов, то из полученных решений следует исключить те, при которых не существуют $\operatorname{tg} 3x$ и $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Для этого разложим формулы, с помощью которых записаны решения каждого из трех уравнений, на элементарные (элементарными называют формулы решений вида $x = \alpha + 2n\pi$, где $0 \le \alpha \le 2\pi$) и изобразим их на единичной окружности (рис. 73). Это можно сделать, т. к. период 2π является общим для всех трех сомножителей.

Проверка показала, что из 10 элементарных формул решений, изображенных на рисунке, шесть оказались посторонними для данного уравнения (они перечеркнуты), поскольку для таких чисел тангенс и котангенс не существуют.

Таким образом, решение уравнения запишем в виде

$$x = m\pi,\ x = \frac{2\pi}{3} + m\pi,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Уравнения, содержащие тригонометрические функции в знаменателе, как и дробные рациональные уравнения, приводят к виду $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$. Далее используют необходимые и достаточные условия, при которых дробь равна нулю.

Например, в уравнении $\frac{\cos x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$ числитель дроби равен нулю, если $x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$, но при этих значениях теряет смысл знаменатель, т. к. $\operatorname{tg} x$ не существует.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin\frac{x}{2}$.

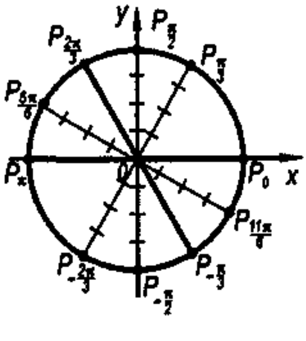

Рис. 73

Решение. $\frac{\sin x}{1+\cos x} - \sin\frac{x}{2} = 0$,

$\frac{\sin x - \sin\frac{x}{2}(1+\cos x)}{1+\cos x} = 0$, $\quad \sin x - \sin\frac{x}{2}(1+\cos x) = 0$,

$\sin x - 2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$, $\quad 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$,

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) = 0$, $\sin x\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) = 0$.

Имеем: 1) $\sin x = 0$, $x = k\pi$, $k \in Z$.

2) $1 - \cos\frac{x}{2} = 0$, $\cos\frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = 2n\pi$, $x = 4n\pi$, $n \in Z$.

Из множества решений $x = k\pi$ следует исключить те, при которых знаменатель $1 + \cos x$ превращается в ноль, т. е. когда $\cos x$ равен -1. Известно, что $\cos x$ равен -1 при всех нечетных k. Итак, надо оставить только решения $x = 2n\pi$.

Множество решений $x = 4n\pi$ включается в множество $x = 2\pi n$. Решениями данного уравнения являются $x = 2n\pi$.

Уравнения, в состав которых входят произведения $\sin\alpha\sin\beta$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$, удобно решать по формулам:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)).$$

Пример 3. Решить уравнение $\sin x\sin 3x + \sin 4x\sin 8x = 0$.

Решение.

$\frac{1}{2}(\cos(x-3x) - \cos(x+3x)) + \frac{1}{2}(\cos(4x-8x) - \cos(4x+8x)) = 0$,

$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) + \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 12x) = 0$; $\cos 2x - \cos 4x + \cos 4x - \cos 12x = 0$, $\cos 2x - \cos 12x = 0$;

$-2\sin\frac{2x+12x}{2}\sin\frac{2x-12x}{2} = 0$, $\sin 7x\sin 5x = 0$.

Отсюда имеем два уравнения:

$\sin 7x = 0$, $7x = k\pi$, $x = k\frac{\pi}{7}$, $k \in Z$;

$\sin 5x = 0$, $5x = n\pi$, $x = n\frac{\pi}{5}$, $n \in Z$.

Тригонометрические уравнения, в состав которых входят алгебраические суммы вида $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$, $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$, $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, 2x + \ldots + \mathrm{tg}\, nx$ или другие аналогичные комбинации аргументов, часто решают, группируя члены и применяя формулы сложения тригонометрических функций. Но делать это следует так, чтобы после преобразования в произведение каждой пары слагаемых появлялся общий множитель. Далее уравнения решают способом разложения на множители.

Пример 4. Решить уравнение:

$$\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0.$$

Решение. Сгруппируем члены так: $(\sin x + \sin 5x) + (\sin 8x - \sin 2x) = 0$. Применим формулы суммы и разности синусов и используем свойство четности косинуса:

$$2\sin 3x \cos 2x + 2\cos 5x \sin 3x = 0,\ 2\sin 3x\,(\cos 2x + \cos 5x) = 0.$$

Еще раз преобразуем в прозведение сумму косинусов:

$$2\sin 3x \cdot 2\cos \frac{7}{2}x \cdot \cos \frac{3}{2}x = 0.$$

Отсюда получим три уравнения:

$$\sin 3x = 0,\ 3x = k\pi,\ x = k \cdot \frac{\pi}{3},\ \ k \in \boldsymbol{Z};$$

$$\cos \frac{7}{2}x = 0,\ \frac{7}{2}x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ x = \frac{\pi}{7} + 2n\frac{\pi}{7} = (2n+1)\frac{\pi}{7},\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\cos \frac{3}{2}x = 0,\ \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + m\pi,\ x = \frac{\pi}{3} + 2m\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(2m+1),\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Последнее множество решений входит в множество $x = \frac{k}{3}\pi$. Итак, решениями данного уравнения являются числа $x = k\frac{\pi}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $x = \frac{\pi}{7}(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Тригонометрические уравнения, в состав которых входят четные степени функций $\sin x$ и $\cos x$, целесообразно решать, понижая степень функции по формулам:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Пример 5. Решить уравнение $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$.

Решение. Произведем замены $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ и получим уравнение $6 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} + 2(1-\cos^2 2x) = 5$, или $3 - 3\cos 2x + 2 - 2\cos^2 2x - 5 = 0$. Отсюда $2\cos^2 2x + 3\cos 2x = 0$. Имеем квадратное уравнение относительно $\cos 2x$. Решая его способом разложения на множители, получим $\cos 2x\,(2\cos 2x + 3) = 0$. Отсюда $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $2\cos 2x + 3 = 0$, $2\cos 2x = -3$,

$\cos 2x = -\frac{3}{2}$ не имеет решений, т. к. $|\cos 2x| \le 1$.

Таким образом, решениями данного уравнения являются числа $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$. Это уравнение можно решить иначе, заменив $\sin^2 2x$ на $4\sin^2 x \cos^2 x$, а $\cos^2 x$ — на $(1 - \sin^2 x)$. После этого получим квадратное уравнение относительно $\sin x$. Но этот способ более громоздкий.

При решении тригонометрических уравнений следует помнить о возможности нарушения равносильности уравнения, т. е. о потере корней и появлении посторонних. В частности, при возведении в квадрат обеих частей уравнения могут появиться посторонние корни. При решении однородных уравнений необоснованное деление на $\cos^n x$ может привести к потере корней. Приходится исключать посторонние корни, решая уравнения, содержащие произведения и дроби в левой части и ноль — в правой.

Приведем еще два примера потери корней.

Пример 6. Решить уравнение $\sin x - \sqrt{7}\cos x = \sqrt{7}$.

Р е ш е н и е . Это линейное уравнение. Используем подстановки $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$. Получим $\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \sqrt{7}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \sqrt{7}$. Т. к. $1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} \ne 0$, то $2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{7}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \sqrt{7}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)$. Отсюда $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{7}$, $x = 2\operatorname{arctg}\sqrt{7} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Нетрудно проверить, что данное уравнение удовлетворяют и числа $x = (2n + 1)\pi$. Потеря решений произошла вследствие применения подстановки и перехода к алгебраическому уравнению относительно тангенса. Его не удовлетворяют числа, при которых $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не существует, т. е. числа $\frac{x}{2} = (2n + 1)\frac{x}{2}$, или $x = (2n + 1)\pi$. Но эти числа удовлетворяют данное уравнение. Поэтому, используя подстановку, выражающую синус и косинус через тангенс половинного угла, необходимо проверять числа $x=(2n+1)\pi$. Если они удовлетворяют данное уравнение, то их следует присоединить к найденным решениям. Окончательное решение запишем в виде $x = 2\operatorname{arctg}\sqrt{7} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $x = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 7. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{ctg} x$.

Р е ш е н и е . Применим формулы

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Получим:

$$\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}+\frac{\operatorname{tg}x-1}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{2}{\operatorname{tg}x},$$

$$\frac{\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x+1)^2+(\operatorname{tg}x-1)(1-\operatorname{tg}x)-2(1-\operatorname{tg}^2x)}{(1-\operatorname{tg}^2x)\operatorname{tg}x}=0.$$

После упрощения имеем:

$$\frac{3\operatorname{tg}^2x-1}{(1-\operatorname{tg}^2x)\operatorname{tg}x}=0,\ 3\operatorname{tg}^2x-1=0,\ \operatorname{tg}^2x=\frac{1}{3},\ \ \operatorname{tg}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

При этих значениях x не теряет смысла и не превращается в ноль знаменатель дроби. Однако нетрудно проверить, что данное уравнение удовлетворяют также числа $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Потеря этих решений произошла вследствие применения теоремы сложения для функции тангенс. Формулы тангенса суммы и разности двух чисел α и β выполняются лишь при условии, если имеют смысл выражения $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Если $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\boldsymbol{Z}$, то $\operatorname{tg}x$ не имеет смысла, поэтому эти корни были потеряны. Если данное уравнение решить по формуле суммы тангенсов двух чисел, то указанные корни не будут потеряны.

В результате решения одного и того же тригонометрического уравнения разными способами можно получить разные общие формулы решений уравнения. Их эквивалентность можно доказать, преобразовав формулы и объединив несколько формул в одну. Можно также доказать равенство найденных множеств решений, записав в развернутом виде прогрессии, n-м членом которых является формула решения тригонометрического уравнения. Однако оба эти способа громоздки. Целесообразно записать данное тригонометрическое уравнение в виде $f(x)=0$, найти наименьший положительный период l функции $y=f(x)$ и показать, что на промежутке $[0;\,l]$ каждая из образованных формул дает одно и то же множество решений. Удобным оказывается также геометрический способ доказательства равенства множеств решений с помощью единичной окружности. Если разные формулы на единичной окружности дают одинаковые множества точек, изображающих отдельные решения уравнения, то эти множества равны. Однако такая геометрическая интерпретация возможна только тогда, когда периодом функции, входящей в левую часть уравнения $f(x) = 0$ (не обязательно наименьшим положительным), является число 2π.

Что касается системы тригонометрических уравнений, то ограничимся рассмотрением примеров решения системы двух тригонометрических уравнений с двумя неизвестными. Решить такую систему, как и систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными, означает найти все пары значений неизвестных, которые превращают эти уравнения системы в правильные числовые равенства.

При решении системы двух тригонометрических уравнений с двумя неизвестными целесообразно или сразу исключить одно из неизвестных, выразив его через другое из какого-нибудь уравнения системы, или же путем введения новых неизвестных или преобразованием уравнений системы привести данную тригонометрическую систему к системе алгебраических уравнений.

Пример 1. Решить систему:

$$\begin{cases} \sin(x-y) = 2\sin x \sin y, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Выразим y из второго уравнения, подставим его в первое уравнение и преобразуем найденное уравнение:

$$y = \frac{\pi}{2} - x;\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right);\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) =$$

$$= 2\sin x\cos x;\ -\cos 2x = \sin 2x;\ \operatorname{tg} 2x = -1;\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Найдем y: $y = \dfrac{5\pi}{8} - \dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

О т в е т. $x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{2}$, $y = \dfrac{5\pi}{8} - \dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решить систему:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Преобразуем второе уравнение:

$$1 - 2\sin^2 x + 1 - 2\cos^2 y = 1,\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}.$$

Заданную систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Для упрощения введем новые неизвестные: $u = \sin x$, $v = \cos y$. Имеем систему:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 + v^2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Найдем решение этой системы. Оно единственное: $u = \frac{1}{2}$; $v = \frac{1}{2}$. Итак, данная система равносильная такой: $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Уравнения последней системы имеют соответственно решения:

$$x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in \boldsymbol{Z},\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in \boldsymbol{Z},\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Пример 3. Решить систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}\cos^3 y, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{2}\sin^3 y. \end{cases}$$

Решение. Поскольку $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$, то данная система приобретет вид:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}\cos^3 y, \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}\sin^3 y. \end{cases}$$

Перемножив почленно уравнения этой системы, получим уравнение с одним неизвестным: $1 = 8\cos^3 y \sin^3 y$. Отсюда:

$\sin^3 2y = 1$, $\sin 2y = 1$, $2y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \boldsymbol{Z}.$

Найденное значение y подставим в последнюю систему, учитывая при этом, что $\cos(\alpha + n\pi) = (-1)^n \cos\alpha$, $\sin(\alpha + n\pi) = (-1)^n \sin\alpha$ (докажите эти формулы самостоятельно).

Получим:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = (-1)^n, \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = (-1)^n. \end{cases}$$

При $n = 2k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, получим $y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, а последняя система равносильна одному уравнению $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$, отсюда $x = l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$. При $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$, последняя система равносильна одному уравнению $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-1$. Отсюда $x=-\frac{\pi}{2}+l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x_1 = l\pi$, $y_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x_2=-\frac{\pi}{2}+l\pi$, $y_2=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$, $l, k \in \mathbf{Z}$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Как решаются тригонометрические уравнения вида

$$f(x)\cdot\varphi(x)\cdot\ldots\cdot\psi(x)=0,\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}=0\ ?$$

2. Когда при решении тригонометрических уравнений может нарушиться равносильность?

3. Как решаются уравнения, в состав которых входят произведения $\sin\alpha\sin\beta$, $\sin\alpha\cos\beta$ и $\cos\alpha\cos\beta$?

4. Как решаются уравнения, в состав которых входят алгебраические суммы вида $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx$, $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx$, $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x+\ldots+\operatorname{tg} nx$ или другие аналогичные комбинации аргументов?

5. Как понижаются степени функций, входящие в состав тригонометрических уравнений?

6. Как решаются системы двух тригонометрических уравнений с двумя неизвестными?

УПРАЖНЕНИЯ

59. Решить уравнение:

А

1) $\cos 2x=\cos 6x$; 2) $\frac{1+\cos 2x}{\cos x}=0$; 3) $\sin\frac{x}{2}+\cos x=1$;

4) $1+\sin x\sin 2x=\cos x\cos 2x$; 5) $\operatorname{tg} x+5\operatorname{ctg} x=6$;

6) $\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}=1$; 7) $\sin x-\sin 2x+\sin 5x+\sin 8x=0$;

8) $\sin^2 3x=3\cos^2 3x$; 9) $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x$.

Б

10) $1-\cos x=\sin x\sin\frac{x}{2}$;

11) $\cos^2 x-3\sin x\cos x+1=0$;

12) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin^2 x=0$;

13) $\mathrm{tg}^3 x-\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}\,x=1$;

14) $\sin 2x\,\mathrm{tg}\,3x\,\mathrm{ctg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$; 15) $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,2x=\mathrm{tg}\,3x$;

16) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$; 17) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$;

18) $\cos^3 x\cos 6x=\cos 4x\cos 7x$.

В

19) $\sqrt{2-3\cos 2x}=\sqrt{\sin x}$; 20) $\frac{1-\cos x}{\sin\frac{x}{2}}=0$;

21) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$;

22) $\frac{\sin 2x}{\sin\frac{2x+\pi}{3}}=0$;

23) $\sin^2 x^2+\sin^2 2x^2=\sin^2 3x^2+\sin^2 4x^2$;

24) $\mathrm{ctg}^4 z=\mathrm{ctg}^3 2z+1$;

25) $\sin x\sin 5x\sin 9x=1$;

26) $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

60. Решить систему уравнений:

А

1) $\begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3}, \\ \frac{\sin x}{\sin y}=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{2}\cos x=1+\cos y, \\ \sqrt{2}\sin x=\sin y. \end{cases}$

Б

3) $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=\frac{1}{2}, \\ x-y=\frac{4\pi}{3}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x+\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{2}. \end{cases}$

В

5) $\begin{cases} \mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,y=3, \\ |x-y|=\frac{\pi}{3}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \cos x+\cos y=1, \\ \cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1. \end{cases}$

§ 15. Решение простейших тригонометрических неравенств

Решение любых тригонометрических неравенств, как правило, сводится к решению простейших неравенств:

$\sin x \geq a$ или $\sin x \leq a$; $\cos x \geq a$ или $\cos x \leq a$;
$\operatorname{tg} x \geq a$ или $\operatorname{tg} x \leq a$; $\operatorname{ctg} x \geq a$ или $\operatorname{ctg} x \leq a$.

Как и простейшие тригонометрические уравнения, неравенства можно решать графически. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е . Обозначим функции, стоящие в левой и правой частях, через $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$ и построим схематически их графики (рис. 74). Решениями неравенства будут абсциссы всех точек графика синусоиды, которые содержатся выше прямой $y = \frac{1}{2}$. Учитывая периодичность функции синус, достаточно найти решения на любом отрезке области определения длиной 2π и прибавить к найденным числам период $2n\pi$, $n \in Z$. Выберем, например, промежуток $[0; 2\pi]$. Из рисунка 74 следует, что множеством значений x из отрезка $[0; 2\pi]$, для которых соответствующие точки графика синусоиды размещены выше точек прямой $y = \frac{1}{2}$, будет $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Прибавив к этим числам период $2n\pi$, получим множество всех решений данного неравенства $\frac{\pi}{6} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$.

Графический способ достаточно наглядный, но неудобство состоит в том, что каждый раз (хотя и схематически) надо строить графики тригонометрических функций.

Более удобным является способ решения простейших тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности. Для данного неравенства решение этим способом прово-

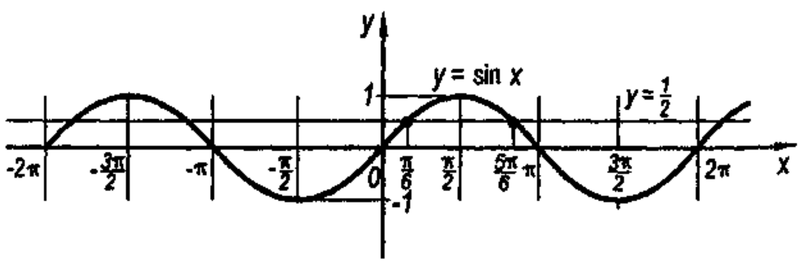

Рис. 74

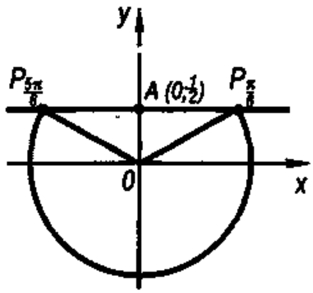

Рис. 75

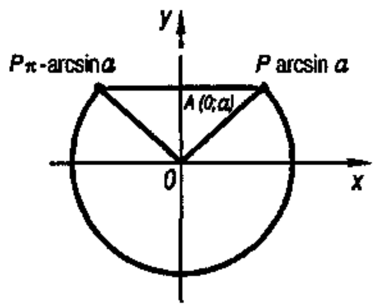

Рис. 76

дят аналогично решению простейшего тригонометрического уравнения.

Построим единичную окружность (рис. 75). Отложим на оси Oy ординату $\frac{1}{2}$ и через конец отрезка проведем прямую, параллельную оси Ox.

Решение данного неравенства сводится к нахождению на единичной окружности всех точек, у которых ординаты больше $\frac{1}{2}$. Эти точки соответствуют искомым числам α, которые являются решениями данного тригонометрического неравенства. Из рисунка 75 видно, что такими точками являются точки дуги окружности, которые расположены над прямой $y = \frac{1}{2}$ и соответствуют числам множества $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, длина которого равна периоду 2π.

Прибавляя к этим числам период функции $2n\pi$, получим множество решений неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$.

Рассматривая решение неравенства вида $\sin x > a$ в общем случае, необходимо наложить ограничения на число a. Если $a \geq 1$, то неравенство $\sin x > a$ решений не имеет, т. к. при любом x всегда $|\sin x| \leq 1$. Если же $a < -1$, то неравенство $\sin x > a$ выполняется при любом x, т. е. множеством решений такого неравенства является множество $\boldsymbol{R}$.

В общем случае неравенство $\sin x > a$, где $-1 \leq a \leq 1$, решают аналогично (рис. 76). Точки $P_{\arcsin a}$ и $P_{\pi - \arcsin a}$ изображают числа $\arcsin a$ и $\pi - \arcsin a$. Решениями неравенства на отрезке $[-\pi; \pi]$ будет множество $(\arcsin a; \pi - \arcsin a)$, а множеством всех решений будут промежутки

$$\arcsin a + 2n\pi < x < \pi - \arcsin a + 2n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

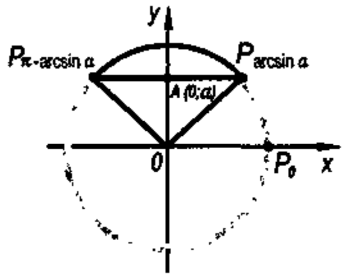

Рис. 77

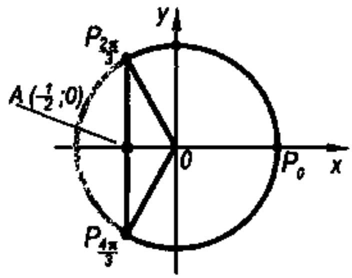

Рис. 78

Аналогично решают неравенство $\sin x < a$. На рисунке 77 показана дуга, которая отвечает решениям этого неравенства.

Пример 2. Решить неравенство $\cos x \le -\frac{1}{2}$.

Решение. Найдем сначала решения на отрезке $[-\pi, \pi]$. Решение данного неравенства сводится к нахождению на единичной окружности всех точек P_α, имеющих абсциссы, которые меньше или равны $-\frac{1}{2}$ (рис. 78). Все эти точки соответствуют на единичной окружности числам α, которые являются решениями данного неравенства.

Отложим на оси Ox отрезок OA, соответствующей абсциссе $-\frac{1}{2}$, и проведем через точку A прямую, параллельную оси Oy.

Искомые точки единичной окружности лежат левее прямой $x = -\frac{1}{2}$ или на самóй прямой и принадлежат дуге $P_{\frac{2\pi}{3}}P_{\frac{4\pi}{3}}$. Таким образом, множеством решений неравенства, которое принадлежит отрезку $[-\pi;\pi]$, является $\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3}$. Прибавляя к этим числам период косинуса, получим все решения неравенства: $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \le x \le \frac{4\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Решить неравенство $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

Решение. Учитывая периодичность тангенса, найдем решения данного неравенства сначала на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Если α — решение данного неравенства, то ордината точки T_α линии тангенса (рис. 79), равная $\operatorname{tg}\alpha$, должна быть меньше, чем $\sqrt{3}$. Все такие точки лежат на касательной P_0T_α ниже точки $T_{\frac{\pi}{3}}$. Соответствующие точки P_α единичной окружности принадлежат дуге, обозначенной на рисунке 79. Эти точки соответствуют числам α, которые принадлежат промежутку $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

Прибавляя к найденным числам период тангенса, получим все решения данного неравенства $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Более сложные тригонометрические неравенства решают способами, которые аналогичны способам решения тригонометрических уравнений такого же вида.

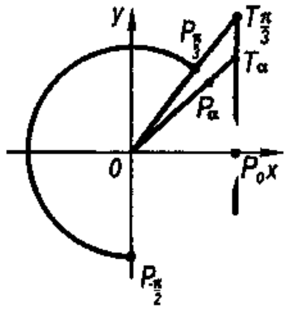

Рис. 79

Пример 4. Решить неравенство $2\cos^2 x - \sin x > 1$.

Р е ш е н и е . Введем новую неизвестную $t = \sin x$, где $|t| \le 1$. Тогда $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$, и неравенство имеет вид: $2(1 - t^2) - t > 1$, или $2t^2 + t - 1 < 0$. Отсюда $-1 < t < \frac{1}{2}$, что не противоречит условию $|t| \le 1$. Затем решаем систему неравенств $-1 < \sin x < \frac{1}{2}$. Получим:

$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ и

$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 5. Решить неравенство

$4\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 3\cos^2 x > 2$.

Р е ш е н и е . Имеем $4\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 3\cos^2 x > 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$. Отсюда $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x > 0$.

Обе части последнего неравенства нельзя разделить на $\cos^2 x$, т. к. при значениях x, которые являются ее решениями, $\cos x$ может равняться нулю. Неравенство следует решать так.

Очевидно, что $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, является решениями рассматриваемого неравенства. Чтобы найти остальные решения при $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $\cos x \ne 0$ и $\cos^2 x > 0$, разделим на $\cos^2 x$ обе части последнего неравенства. Получим неравенство $2\mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}\, x + 1 > 0$. Отсюда: $\mathrm{tg}\, x < \frac{1}{2}$ и $\mathrm{tg}\, x > 1$. Итак,

$-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi$ и $\frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Кроме полученных решений, неравенство имеет еще найденное ранее решение $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

1. Как решить неравенства вида $\sin x \geq a$, $\sin x \leq a$ с помощью единичной окружности?

2. Как решить неравенства вида $\cos x \geq a$, $\cos x \leq a$ с помощью единичной окружности?

3. Как решить неравенства вида $\operatorname{tg} x \geq a$, $\operatorname{tg} x \leq a$ с помощью единичной окружности?

4. Как решаются отдельные виды неравенств, отличных от простейших?

УПРАЖНЕНИЯ

61. Решить неравенство:

1) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{tg} x > -1$; 3) $\sin x > 2$; 4) $\operatorname{tg} x \leq 2$;

5) $\cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}$; 6) $|\sin x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\cos x > \frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $\cos^2 x < \frac{1}{4}$;

9) $2\cos x \operatorname{tg} x > \sin x - 1$; 10) $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$;

11) $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x < 0$;

12) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x > 0$.

ГЛАВА

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Основополагающее понятие математического анализа — это понятие функциональной зависимости, в которой, как в зародыше, уже заложена вся идея постижения явлений природы и процессов техники с помощью математического аппарата.

А. Я. Хинчин

Корень *n*-й степени и его свойства

1. Понятие корня *n*-й степени. В курсе алгебры 8-го класса было введено понятие квадратного корня.

[illegible] корнем из числа a называют число [illegible] равен a.

Например, числа 3 и −3 — квадратные корни из 9, поскольку $3^2 = 9$ и $(-3)^2 = 9$; $\frac{2}{5}$ и $-\frac{2}{5}$ — квадратные корни из $\frac{4}{25}$, поскольку $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ и $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

Квадратный корень из 0 равен 0, т. к. $0^2 = 0$. Этот корень из 0 — единственный. Квадратный корень из −25 не существует, т. к. нет такого числа, квадрат которого равнялся бы −25.

Следовательно, квадратных корней из положительного числа существует два: один положительный, а другой — отрицательный.

[illegible] квадратный корень из [illegible] a называют арифметическим квадратным [illegible] $\sqrt{a}$.

Знак $\sqrt{\ }$ называют **знаком арифметического корня**; выражение, стоящее под знаком корня, называется **подкоренным выражением**.

Положительные числа вместе с числом ноль называют неотрицательными числами. В дальнейшем понятие арифметического квадратного корня будем применять к неотрицательным числам.

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Из этого определения следует, что при $a < 0$ выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла (например, $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-49}$, $\sqrt{-1{,}44}$).

Используя введенное обозначение, запишем корни уравнения $x^2 = 81$, $x_1 = \sqrt{81}$, $x_2 = -\sqrt{81}$.

Если надо извлечь квадратный корень из алгебраической суммы, то нельзя извлекать его из каждого слагаемого отдельно.

Например, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, но $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

Следовательно, действие извлечения корня относительно сложения (и вычитания) не имеет распределительного свойства. То же самое можно сказать и о действии возведения в степень.

Мы напомнили важнейшие сведения о квадратном корне, или корне второй степени.

Рассмотрим корень любой степени. Равенство $5^3 = 125$ можно прочитать так: число 5 является кубическим корнем (корнем третьей степени) из 125.

Аналогично из равенства $(-4)^3 = -64$ следует, что число -4 является кубическим корнем из -64, а из равенства $(-3)^4 = 81$, что число -3 является корнем четвертой степени из 81.

Извлечение корня — это операция, обратная операции возведения в степень.

Корнем n-й степени из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a (n — натуральное число

Пусть n — нечетное число. Корень нечетной степени из числа всегда существует и к тому же только один: если $a > 0$, этот корень — положительное число, при $a = 0$ он равен нулю, при $a < 0$ корень — отрицательное число. Для его обозначения принят знак $\sqrt[n]{a}$ (читается «корень n-й степени из a»).

Знак операции извлечения корня $\sqrt[n]{}$, а также результат этой операции (например, $\sqrt[5]{a}$) называют еще радикалом (лат. *radix* — корень).

Число n называют **показателем корня**, число a — **подкоренным выражением.**

Пусть n — четное число. Если $a > 0$, то существует два противоположных числа, которые являются корнями n-й степени из a.

Положительный корень n-й степени из a обозначают в этом случае знаком $\sqrt[n]{a}$, а противоположное ему число — через $-\sqrt[n]{a}$. Если $a = 0$, то существует единственный корень n-й степени из a: $\sqrt[n]{0} = 0$, т. к. $0^n = 0$. Если $a < 0$, то корень n-й степени из a не существует. Иначе говоря, выражение $\sqrt[n]{a}$, где n — четное и $a < 0$, не имеет смысла.

Таким образом, если n — нечетное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом a; если n — четное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл лишь когда $a \geq 0$.

Очевидно, что при всех значениях a, для которых выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл, выполняется равенство $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Если $a \geq 0$, то выражение $\sqrt[n]{a}$ всегда (как и при четном, так и при нечетном n) имеет смысл.

Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа называется неотрицательное число, n-ная степень которого равна a.

Корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень той же степени из противоположного (положительного) числа. Например, $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125}$.

Вообще, если $a < 0$ и k — натуральное число, то $\sqrt[2k-1]{-a} = -\sqrt[2k-1]{a}$.

Действительно, $\left(\sqrt[2k-1]{a}\right)^{2k-1} = a$; $\left(-\sqrt[2k-1]{-a}\right)^{2k-1} = -(-a) = a$.

Известно, что для квадратного корня выполняется тождество $\sqrt{a^2} = |a|$. Аналогично для корня n-й степени с четными показателями выполняется тождество $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

Далее будем пользоваться арифметическими корнями.

Наименьший из натуральных показателей, которые рассматривают, равен 2, его не пишут.

2. Свойства корней. По определению корня n-й степени можно доказать следующие утверждения.

1) Для любых неотрицательных чисел a и b и любого натурального числа n справедливо равенство:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}\,. \tag{1}$$

Произведение корней n-й степени из чисел a и b равно корню n-й степени из их произведения.

Это утверждение можно обобщить для любых натуральных чисел n и r и неотрицательных чисел $a_1, \ldots, a_r$:

$$\sqrt[n]{a_1}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a_r}=\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_r}\quad.$$

Например: $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{16}=2$, т. к. $2^4=16$; $\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{9}=\sqrt[5]{243}=3$, т. к. $3^5=243$.

Для корней нечетной степени числа a и b могут быть и отрицательными:

$$\sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{-1000}=-10,\ \text{т. к. } (-10)^3=-1000;$$

$$\sqrt[7]{2}\cdot\sqrt[7]{4}\cdot\sqrt[7]{16}=\sqrt[7]{128}=2,\ \text{т. к. } 2^7=128.$$

2) Для каждого неотрицательного числа a, каждого положительного числа b и натурального числа n справедливо равенство:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\quad. \tag{2}$$

Частное корней n-й степени из чисел a и b равно корню n-й степени из их частного.

Например:

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{81}{3}}=\sqrt[3]{27}=3,\ \text{т. к. } 3^3=27;$$

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{128}}=\sqrt[4]{\frac{8}{128}}=\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\frac{1}{2},\ \text{т. к. } \left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16};$$

$$\frac{\sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{243}}=\sqrt[3]{-\frac{9}{243}}=\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3},\ \text{т. к. } \left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{1}{27};$$

$$\frac{\sqrt[5]{-9}}{\sqrt[5]{-288}}=\sqrt[5]{\frac{-9}{-288}}=\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\frac{1}{2},\ \text{т. к. } \left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}.$$

3) Для каждого целого числа k, каждого положительного числа a и натурального числа n выполняется равенство:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}\quad. \tag{3}$$

Если k — натуральное число, то равенство справедливо и для $a=0$, т. е. для любого неотрицательного числа a.

Если $k=n$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\sqrt[n]{a^n}=a$.

Примеры.

а) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^4=\sqrt[5]{3^4}=\sqrt[5]{81}$; б) $\left(-\sqrt[5]{11}\right)^5=-\sqrt[5]{11^5}=-11$;

в) $\left(3\sqrt[5]{-3}\right)^5 = 3^5\ \sqrt[5]{(-3)^5} = 3^5 \cdot (-3) = -3^6 = -729;$

г) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^3 = -\sqrt[4]{7^3} = -\sqrt[4]{343}$.

4) Для любых натуральных чисел m и n, каждого неотрицательного числа a справедливо равенство:

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}}\ . \qquad (4)$$

Например: $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[2\cdot3]{5} = \sqrt[6]{5}$; $\quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{6}} = \sqrt[3\cdot5]{6} = \sqrt[15]{6}$;

$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2\cdot2]{16} = \sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[5]{\sqrt{1024}} = \sqrt[5\cdot2]{1024} = \sqrt[10]{1024} = 2$.

5) Для любых натуральных чисел m, n и p и каждого неотрицательного числа a справедливо равенство:

$$\boxed{\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}}\ . \qquad (5)$$

Например: $\sqrt[4]{9^2} = \sqrt{9} = 3$; $\sqrt[4]{25^6} = \sqrt[4]{(5^2)^6} = \sqrt[4]{5^{12}} = 5^3 = 125$, или $\sqrt[4]{25^6} = \sqrt[4]{(25^3)^2} = \sqrt{25^3} = \sqrt{25^2 \cdot 25} = 125$.

Докажем для примера равенство (1). Обозначим $\sqrt[n]{a} = x$ и $\sqrt[n]{b} = y$, где $x \ge 0$, $y \ge 0$. По определению корня n-й степени, $a = x^n$, $b = y^n$, отсюда $ab = x^n\ y^n = (xy)^n$.

Числа a, b неотрицательные. Значит, и xy — неотрицательное число, а поэтому существует единственное неотрицательное число, которое является корнем n-й степени из ab.

Принимая во внимание, что $xy \ge 0$, получим $\sqrt[n]{ab} = xy$, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, что и требовалось доказать.

Предлагаем самостоятельно доказать этим же способом равенства (2)—(5).

Отметим, что для выполнения вычислений важно уметь читать некоторые из приведенных выше равенств справа налево.

Чтобы извлечь корень n-й степени из произведения неотрицательных чисел, следует извлечь корень той же степени из каждого сомножителя и полученные результаты перемножить:

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}\ .$$

Например: $\sqrt[3]{343 \cdot 8} = \sqrt[3]{343} \cdot \sqrt[3]{8} = 7 \cdot 2 = 14$;

$\sqrt[4]{16\cdot 81}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{81}=2\cdot 3=6$; $\sqrt[5]{32\cdot 243}=\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{243}=2\cdot 3=6$; $\sqrt[5]{32\cdot 0{,}00001}=\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{0{,}00001}=2\cdot 0{,}1=0{,}2$.

Чтобы извлечь корень n-й степени из частного неотрицательного числа a на положительное число b, следует извлечь корень той же степени из делимого и делителя и первый результат разделить на второй:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ \ (a\ge 0,\ b>0)}\ .$$

Например: $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{2}{3}$; $\sqrt[3]{\dfrac{343}{8}}=\dfrac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{7}{2}=3\dfrac{1}{2}$;

$\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}}=\dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}}=\dfrac{2}{3}$; $\sqrt[3]{4\dfrac{17}{27}}=\sqrt[3]{\dfrac{125}{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{5}{3}=1\dfrac{2}{3}$.

Особого внимания заслуживает равенство (5), выражающее основное свойство арифметического корня:

при делении показателя корня и показателя степени подкоренного выражения на одно и то же число значение корня из неотрицательного числа не изменяется.

Докажем это утверждение.

Дано: $a\ge 0$, m, n, p — натуральные числа.

Доказать: $\boxed{\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}}$. Обозначим $\sqrt[np]{a^{mp}}=x\ (x\ge 0)$, $\sqrt[n]{a^m}=y$ ($y\ge 0$). Тогда, по определению корня, $x^{np}=a^{mp}$, $y^n=a^m$, следовательно, $y^{np}=a^{mp}$. Отсюда $x^{np}=y^{np}$. Т. к. $x\ge 0$, $y\ge 0$, то $x=y$, что и требовалось доказать.

Показатель корня и показатель степени подкоренного выражения можно делить на одно и то же число. В таком случае говорят, что показатели корня и подкоренного выражения сокращены на одно и то же число.

Из этого утверждения получим следствие:

чтобы извлечь корень из степени, следует показатель степени подкоренного выражения разделить на показатель корня, если возможно деление без остатка.

Действительно, пусть $a\ge 0$, m, n, p — натуральные числа и $m=np$. Тогда, по основному свойству корня, имеем:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{np}} = a^p}\ .$$

Например: $\sqrt[18]{36^3} = \sqrt[6\cdot 3]{36^3} = \sqrt[6]{36}$;

$$\sqrt[12]{25^3} = \sqrt[4\cdot 3]{25^3} = \sqrt[4]{25}\,;\ \sqrt[18]{7^{12}} = \sqrt[6\cdot 3]{7^{6\cdot 2}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}\,;$$

$$\sqrt[8]{16^5} = \sqrt[8]{(2^4)^5} = \sqrt[8]{(2^5)^4} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2} = 4\sqrt{2}\,.$$

Читая равенство $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ справа налево, т.е. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, обнаружим справедливость такого утверждения:

при умножении показателя корня и показателя степени подкоренного выражения на одно и то же число значение корня из неотрицательного числа не изменяется.

Пользуясь этим утверждением, можно приводить радикалы с различными показателями к общему показателю. Например:

$$\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3\cdot 2]{5^{2\cdot 2}} = \sqrt[6]{5^4}\,;\ \sqrt{2} = \sqrt[3\cdot 2]{2^3} = \sqrt[6]{8}\,.$$

Привести к общему показателю радикалы: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[4]{2}$. Наименьшее общее кратное показателей всех радикалов 12; дополнительные множители: 6 — для первого радикала, 4 — для второго, 3 — для третьего. Имеем:

$$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}\,;\ \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}\,;\ \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}\,.$$

Преобразование радикалов приходится выполнять над выражениями, содержащими отрицательные числа. При этом надо внимательно следить за знаками.

Например: $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{729} = 3$. Но $-3 \neq 3$, значит, $\sqrt[3]{-27} \neq \sqrt[6]{(-27)^2}$.

3. Простейшие преобразования радикалов. Вынесение множителя за знак радикала. В случаях, когда подкоренное выражение раскладывается на множители так, что из одного или нескольких из них можно извлечь точный корень, то эти множители после извлечения из них корня можно записать перед знаком корня. Такое преобразование называется **вынесением множителя за знак радикала.**

Например: $\sqrt{75} = \sqrt{25\cdot 3} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$;

$$\sqrt{98a^3b} = \sqrt{49\cdot 2\cdot a^2\cdot ab} = 7a\sqrt{2ab}\,;$$

$$\sqrt[3]{375x^7y^2} = \sqrt[3]{125\cdot 3x^6xy^2} = \sqrt[3]{125x^6}\cdot\sqrt[3]{3xy^2} = 5x^2\sqrt[3]{3xy^2}\,.$$

Вынося буквенные множители за знак радикала, под всеми буквами следует понимать только неотрицательные числа. В частности, в рассмотренных выше примерах $a \geq 0$, $b \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq 0$. Если $a < 0$ и $b < 0$, то выражение $\sqrt{98a^3b}$ имеет смысл, но не равно $7a\sqrt{2ab}$.

Чтобы узнать, с каким показателем степени можно вынести за знак корня множитель, а какие множители и с какими показателями степеней останутся под корнем, достаточно показатель степени множителя, стоящего под корнем, разделить на показатель степени радикала: частное покажет, в какой степени этот множитель будет стоять перед корнем, а остаток покажет, в какой степени этот множитель останется под знаком радикала.

Вынесением множителя за знак радикала можно привести дробное подкоренное выражение к целому виду. Для этого достаточно умножить числитель и знаменатель подкоренного выражения на один и тот же множитель так, чтобы из знаменателя извлекался точный корень. Например:

$$\sqrt{\frac{3x}{5}} = \sqrt{\frac{3x \cdot 5}{5 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{15x}{5^2}} = \frac{1}{5}\sqrt{15x};$$

$$\sqrt[3]{\frac{3a^2x}{5b^2}} = \sqrt[3]{\frac{3a^2x \cdot 25b}{5b^2 \cdot 25b}} = \frac{1}{5b}\sqrt[3]{75a^2bx}.$$

Внесение положительных множителей под знак радикала. Преобразование, обратное вынесению множителей за знак радикала, называется **внесением множителей под знак радикала.**

Чтобы внести положительный множитель под знак радикала, следует возвести его в степень, показатель которой равен показателю корня, и записать результат под знаком корня.

Так, запись $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ можно рассматривать как преобразование, обратное вынесению множителя за знак корня.

Например: $2\sqrt{3x} = \sqrt{2^2 \cdot 3x} = \sqrt{12x}$;

$$5a\sqrt[3]{2x} = \sqrt[3]{(5a)^3 \cdot 2x} = \sqrt[3]{125a^3 \cdot 2x} = \sqrt[3]{250a^3x};$$

$$\frac{3a^2}{b}\sqrt[4]{\frac{2b^3}{9a^3}} = \sqrt[4]{\frac{81a^8 \cdot 2b^3}{b^4 \cdot 9a^3}} = \sqrt[4]{\frac{18a^5}{b}}; \;\; 2a^2\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{2^n a^{2n} x}.$$

Заметим, что внесение множителя под знак радикала используют при сравнении выражений. Например, какое число больше: $2\sqrt{5}$ или $5\sqrt{2}$? Внеся множитель под знак корня, получим:

$$2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}; \; 5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}.$$

Следовательно, $5\sqrt{2} > 2\sqrt{5}$.

Такое преобразование целесообразно при выполнении приближенных вычислений. Пусть надо вычислить $5\sqrt{2}$ с точностью до 0,01. Из таблиц найдем $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ (с точностью до 0,01). Приближенное значение $5\sqrt{2} = 5 \cdot 1{,}41 = 7{,}05$. Но погрешность найденного произведения в пять раз больше погрешности приближенного значения $\sqrt{2}$. Чтобы точнее вычислить выражение $5\sqrt{2}$, целесообразно внести множитель 5 под знак корня.

Получим $5\sqrt{2} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$. Таким образом, вследствие внесения множителя 5 под знак корня мы получили более точное значение выражения $5\sqrt{2}$.

Под радикал можно вносить как числовые, так и буквенные множители, учитывая то, что буквенный множитель не может быть отрицательным.

Приведение радикалов к простейшему (нормальному) виду. Будем считать, что радикал приведен к простейшему виду, если: подкоренное выражение не содержит дробей; рациональные множители вынесены за знак радикала; показатель корня и показатель степени подкоренного выражения сокращены на их наибольший общий делитель. Если же подкоренное выражение является произведением нескольких сомножителей, показатели степеней которых имеют общий делитель, то показатель корня и показатели степеней сомножителей разделены на этот делитель. Приведем примеры преобразования радикалов к простейшему виду:

$$3x^2y\sqrt{\frac{12}{xy}} = 3x^2y\sqrt{\frac{4\cdot 3xy}{x^2y^2}} = \frac{6x^2y}{xy}\sqrt{3xy} = 6x\sqrt{3xy};$$

$$2\sqrt[3]{\frac{3a^2}{4}} = 2\sqrt[3]{\frac{3a^2\cdot 2}{4\cdot 2}} = \sqrt[3]{6a^2};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)ab}{ab\cdot ab}} = \frac{1}{ab}\sqrt{ab(a^2+b^2)}.$$

4. Приведение подобных радикалов. При упрощении выражений, содержащих сумму радикалов, пользуются преобразованием, называемым **приведением подобных радикалов**. Такое приведение аналогично приведению подобных членов многочлена. Тем не менее определение подобных радикалов отличается от определения подобных членов.

Радикалы называют **подобными**, если после приведения их к простейшему (нормальному) виду они имеют равные подкоренные выражения и одинаковые показатели. Например, подобными являются радикалы:

$$3\sqrt{2},\ -0{,}7\sqrt{2},\ ab\sqrt{2},\ (x-y)\sqrt{2};\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{ab},\ -3\sqrt[3]{ab},\ \frac{x+2}{3}\sqrt[3]{ab};$$

$$x^2y\sqrt{x+y},\ \frac{1}{5}\ xy\sqrt{x+y}.$$

Рациональный множитель, который стоит перед знаком радикала, называют **коэффициентом.**

Если радикалы не приведены к простейшему виду, то нельзя говорить об их подобии. Чтобы это выяснить, следует их упростить, т. е.: освободиться под радикалом от дробей; вынести за знак радикала те множители, из которых извлекается точный корень; показатели корня и степени подкоренного выражения сократить на наибольший общий делитель.

Рассмотрим примеры на доказательство подобности радикалов:

1) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}, \sqrt[3]{\frac{1}{x^2y}}$ и $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$; 2) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ и $\sqrt{a^2-b^2}$;

3) $\sqrt[3]{16}, \sqrt[6]{4a^6}$ и $\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}$.

Решение.

1) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{1}{y}\sqrt[3]{xy^2}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y}} = \frac{1}{xy}\sqrt[3]{xy^2}$; $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}} = \frac{1}{x}\sqrt[3]{xy^2}$.

Следовательно, данные радикалы подобны.

2) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}} = \frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$.

Следовательно, радикалы $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ и $\sqrt{a^2-b^2}$ подобны.

3) $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[6]{4a^6} = a\sqrt[6]{4} = a\sqrt[3]{2}$;

$\sqrt[3]{6\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{27}{4}} = \sqrt[3]{\frac{27\cdot 2}{8}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

Следовательно, радикалы подобны.

5. Действия над радикалами. Сложение и вычитание. Сложение и вычитание радикалов выполняется так же, как сложение и вычитание рациональных одночленов: радикалы соединяют знаками «+» или «−» и приводят подобные радикалы, если они есть.

Во многих случаях при сложении и вычитании радикалов приходится сначала определять подобные радикалы, а потом их приводить. Для определения подобных радикалов надо привести радикалы к простейшему виду. Например:

$$4\sqrt{6} + 7\sqrt{54} = 4\sqrt{6} + 7\sqrt{9\cdot 6} = 4\sqrt{6} + 21\sqrt{6} = 25\sqrt{6};$$

$$2a\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}} + 3b\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} = 2a\sqrt[3]{\frac{ab}{a^3}} + 3b\sqrt[3]{\frac{ab}{b^3}} = 2\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{ab} = 5\sqrt[3]{ab}.$$

Умножение и деление радикалов. Чтобы перемножить несколько радикалов с одинаковыми показателями, надо перемножить подкоренные выражения и написать произведение под знаком корня с тем же показателем.

Например: $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{70}$;

$2\sqrt{3ax}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3a}=\frac{1}{2}\sqrt{9a^2x}=\frac{3}{2}a\sqrt{x}$.

Чтобы разделить радикалы с одинаковыми показателями, надо разделить их подкоренные выражения и записать частное под знаком корня с тем же показателем. Если перед радикалами есть коэффициенты, то их также следует разделить. Например:

$$27\sqrt[6]{115}:9\sqrt[6]{5}=3\sqrt[6]{23};\quad -9a\sqrt{\frac{2a-2b}{x}}:\frac{3a}{b}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}=$$

$$=-\frac{9ab}{3a}\sqrt{\frac{2(a-b)\cdot 2bx^2}{x(a-b)}}=-3b\sqrt{4bx}=-6b\sqrt{bx}.$$

Если надо умножить или разделить радикалы с разными показателями, то их следует сначала привести к одному показателю. Например:

$$\sqrt[3]{4a^2}:\sqrt{2a}=\sqrt[6]{16a^4}:\sqrt[6]{8a^3}=\sqrt[6]{2a};$$

$$a\sqrt{2x}\cdot\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\cdot b\sqrt[4]{3x^3}=a\sqrt[12]{2^6x^6}\cdot\frac{b}{a}\sqrt[12]{\frac{1}{x^8}}\cdot b\sqrt[12]{3^3x^9}=$$

$$=b^2\sqrt[12]{\frac{2^6\cdot 3^3x^6x^9}{x^8}}=b^2\sqrt[12]{1728x^7}.$$

Если надо умножить или разделить радикал на рациональное выражение, то достаточно на него умножить или разделить коэффициент радикала.

Например:

$5x\sqrt[3]{3ax^2}\cdot(-2{,}5a)=-12{,}5ax\sqrt[3]{3ax^2}$;

$8a^2b^2\sqrt{xy}:\frac{2}{3}ab=\frac{8a^2b^2\cdot 3}{2ab}\sqrt{xy}=12ab\sqrt{xy}$.

Возведение радикала в степень. Возведение радикала в степень и извлечение корня из корня мы уже рассматривали при изучении свойств корней. Рассмотрим еще некоторые примеры.

Чтобы возвести радикал в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель радикала.

Например: $\left(\sqrt[3]{3x^2y}\right)^2=\sqrt[3]{(3x^2y)^2}=\sqrt[3]{9x^4y^2}$;

$$\left(\sqrt[m]{2a^3}\right)^n = \sqrt[m]{2^n a^{3n}}.$$

Извлечение корня из радикалов.

Чтобы извлечь корень из корня, необходимо из подкоренного выражения извлечь корень с показателем, равным произведению двух данных показателей корней.

Например: $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^{14}}} = \sqrt[6]{a^{14}} = \sqrt[3]{a^7} = a^2\sqrt[3]{a}$ (первый способ); $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = a^2\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = a^2\sqrt[6]{a^2} = a^2\sqrt[3]{a}$ (второй способ); $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{(a^2\sqrt[3]{a})^2} = a^2\sqrt[3]{a}$ (третий способ).

Отметим, что умножение и деление сумм, содержащих радикалы, выполняются по обычным правилам умножения и деления многочленов. При этом широко используются формулы сокращенного умножения и деления. Например:

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) =$$
$$= (\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2 = x + 1 - x + 1 = 2, \text{ если } x > 1;$$
$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3a} - 5\sqrt{0{,}2b}\right)^2 = \frac{3}{4}a - 5\sqrt{0{,}6ab} + 5b.$$

Раскладывая на множители выражения, содержащие радикалы, применяют не только разложение на множители подкоренных выражений, но и представление рациональных выражений в виде произведения радикалов. Например:

$a + \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)$, здесь a представляем как $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$;

$$\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Приведение к рациональному виду членов дробных иррациональных выражений. При вычислении дробных иррациональных выражений иногда целесообразно освобождаться от иррациональности (то есть от радикалов) в знаменателе или числителе. Это преобразование опирается на основное свойство дроби:

значение дроби не изменяется в результате умножения ее числителя и знаменателя на одно и то же число, не равное нулю.

Приведем примеры, когда знаменатель — одночленное иррациональное выражение:

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3};$$

$$\frac{5}{2\sqrt[5]{3^2}}=\frac{5\sqrt[5]{3^3}}{2\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=\frac{5\sqrt[5]{3^3}}{2\sqrt[5]{3^5}}=\frac{5\sqrt[5]{3^3}}{6}=\frac{5\sqrt[5]{27}}{6}.$$

Если в знаменателе двучлен, то можно освободиться от иррациональности в знаменателе, используя тождество $(x-y)\times$ $\times(x+y)=x^2-y^2$.

Например:

$$\frac{5}{4+\sqrt{11}}=\frac{5\left(4-\sqrt{11}\right)}{\left(4+\sqrt{11}\right)\left(4-\sqrt{11}\right)}=\frac{5\left(4-\sqrt{11}\right)}{16-11}=\frac{5\left(4-\sqrt{11}\right)}{5}=4-\sqrt{11};$$

$$\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}=\frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{6-3}=\frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{3};$$

$$\frac{14}{5\sqrt{2}+2\sqrt{7}}=\frac{14\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)}{\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{7}\right)\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)}=\frac{14\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)}{\left(5\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{7}\right)^2}=$$

$$=\frac{14\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)}{50-28}=\frac{14\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)}{22}=\frac{7\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)}{11}.$$

В отдельных случаях возникает потребность освободиться от иррациональности в числителе. Преобразования выполняют аналогично, т. е. числитель и знаменатель умножают на такое выражение, чтобы произведение в числителе стало рациональным.

Например: $\frac{3\sqrt{2}}{5}=\frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{6}{5\sqrt{2}}$;

$$\frac{2\sqrt[4]{a^3}}{3a}=\frac{2\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[4]{a}}{3a\sqrt[4]{a}}=\frac{2a}{3a\sqrt[4]{a}}=\frac{2}{3\sqrt[4]{a}};$$

$$\frac{5+\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(5+\sqrt{3}\right)\left(5-\sqrt{3}\right)}{4\left(5-\sqrt{3}\right)}=\frac{5^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{4\left(5-\sqrt{3}\right)}=\frac{25-3}{4\left(5-\sqrt{3}\right)}=\frac{11}{2\left(5-\sqrt{3}\right)}.$$

1. Как называется действие, с помощью которого, зная показатель степени и степень, можно найти основание степени?

2. Для какого действия извлечение корня является обратным действием?

3. Что называется корнем n-й степени из числа a?

4. Что называется корнем пятой степени из числа a?

5. Какой знак имеет корень нечетной степени: из положительного числа? из отрицательного числа?

6. Каким правилом нужно воспользоваться для определения знака корня нечетной степени?

7. Правильны ли равенства: $\sqrt[3]{64}=4$; $\sqrt[3]{-125}=-5$; $\sqrt[4]{81}=3$; $\sqrt{36}=6$; $\sqrt{25}=-5$; $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=1-\sqrt{3}$?

8. Что называется арифметическим значением корня (или арифметическим корнем)?

9. Можно ли утверждать, что a — арифметический корень из a^2?

10. Правильно ли, что кубический корень из 125 имеет два знака?

11. Указать, какое из двух определений арифметического корня правильное:

1) арифметическим корнем называют корень из неотрицательного числа;

2) арифметическим корнем называют неотрицательное значение корня из неотрицательного числа.

12. Чему равно $(\sqrt[9]{17})^9$?

13. Что больше: $\sqrt[8]{90}$ или $\sqrt[9]{85}$?

14. Что больше: $\sqrt[6]{11^2}$ или $\sqrt[3]{11}$?

15. Что меньше: $\sqrt[9]{6}$ или $\sqrt[18]{36}$?

16. Упростить выражение $\sqrt[8]{a^4+2a^2b^2+b^4}$, используя основное свойство корня.

17. Как извлечь корень: из произведения? из дроби?

18. Как перемножить корни одной и той же степени?

19. Записать правило умножения корней с одинаковыми показателями аналитически (в виде формулы).

20. Записать аналитически правило извлечения корня из дроби.

21. Как выполнить деление корней одинаковой степени? Записать это правило аналитически.

22. Как извлечь корень из степени? Записать это правило аналитически и проиллюстрировать его примерами.

23. Как извлечь корень из корня? Записать это правило аналитически и проиллюстрировать его примерами.

24. Назвать свойства корней. Записать их аналитически.

25. Как вынести множитель за знак радикала (корня)?

26. С каким показателем степени можно вынести за знак корня множитель?

27. Какие выражения называются иррациональными относительно какой-нибудь буквы?

28. Какие свойства корней используются при вынесении множителя за знак корня, если подкоренное выражение дробное?

29. Как называется преобразование, обратное вынесению множителя за знак корня?

30. На каком свойстве корня основывается преобразование, приводящее к понижению степени корня?

31. Какое из двух утверждений правильное:

1) степень любого корня может быть понижена;

2) степень не любого корня может быть понижена?

32. На каком свойстве корней основывается приведение их к общему показателю?

33. Нужно ли понижать степени корней (если это возможно) перед приведением их к общему показателю?

34. Сформулировать правило приведения корней к наименьшему общему показателю.

35. Что значит выражение «привести радикал к упрощенному виду»?

36. Даны корни $\sqrt[12]{a^{10}b^6}$, $\sqrt[5]{a^6}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[10]{32a^5}$. Какие из них приведены к упрощенному виду, а какие — нет?

37. Какие радикалы называются подобными?

38. Как сложить (вычесть) радикалы? Проиллюстрируйте на примерах.

39. Как перемножить несколько корней с одинаковыми показателями? Проиллюстрировать на примерах.

40. Как разделить корни с одинаковыми показателями? Проиллюстрировать на примерах.

41. Как перемножить (разделить) радикалы с разными показателями?

42. Какая разница между иррациональным выражением и иррациональным числом?

43. Как освободить знаменатель дроби от иррациональности, если этот знаменатель — одночлен?

44. Как освободить знаменатель дроби от иррациональности, если этот знаменатель — двучлен с квадратными корнями? с кубическими корнями?

45. Как освободиться от квадратной иррациональности в трехчленном знаменателе дроби?

46. Как освободить от иррациональности числитель дроби? Объяснить на примере.

47. Сравнить числа (не выполняя приближенных вычислений):

а) $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[4]{2}$ и $\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{19}}$.

48. При каких значениях букв справедливы равенства:

а) $\sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$; б) $\sqrt{7x^2} = -x\sqrt{7}$;

в) $\sqrt{2b^2 - 24b + 72} = (b-6)\sqrt{2}$;

г) $\dfrac{1}{\sqrt{2b^2 - 24b + 72}} = \dfrac{1}{(6-b)\sqrt{2}}$?

УПРАЖНЕНИЯ

62. Доказать, что:

1) число 10 — арифметический квадратный корень из 100;

2) число -2 не является арифметическим квадратным корнем из 4;

3) число 0,3 не является арифметическим квадратным корнем из 0,9;

4) $\sqrt{2{,}89} = 1{,}7$ является правильным равенством.

63. Найти значения корня:

1) $\sqrt{16}$; 2) $\sqrt{0{,}16}$; 3) $\sqrt{0{,}0016}$; 4) $\sqrt{0{,}000016}$; 5) $\sqrt{\dfrac{25}{36}}$;

6) $\sqrt{2\dfrac{1}{4}}$; 7) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}}$; 8) $\sqrt{3\dfrac{6}{25}}$; 9) $\sqrt{\dfrac{25}{16}}$; 10) $\sqrt{0{,}0121}$;

11) $\sqrt{2{,}25}$; 12) $\sqrt{1{,}96}$.

64. Найти значение выражения:

1) $0{,}2\sqrt{144} + 0{,}3\sqrt{169}$; 2) $-9\sqrt{0{,}0001} + \dfrac{1}{15}\sqrt{900}$;

3) $\sqrt{36} + \sqrt{\dfrac{9}{25}}$; 4) $\sqrt{2\dfrac{14}{25}} - \sqrt{\dfrac{16}{25}}$.

65. Записать с помощью знака $\sqrt{}$ корни уравнения и вычислить их значения:

1) $x^2 = 0{,}25$; 2) $y^2 = 2{,}25$; 3) $z^2 = 0{,}49$; 4) $x^2 = 1\dfrac{7}{9}$.

66. Имеет ли смысл выражение:

1) $\sqrt{196}$; 2) $\sqrt{-196}$; 3) $-\sqrt{196}$; 4) $\sqrt{(-49)\cdot(-4)}$;

5) $\sqrt{-49\cdot 4}$?

67. При каких значениях a и x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{a}$; 2) $\sqrt{-a}$; 3) $\sqrt{x^2}$; 4) $\sqrt{-36x}$; 5) $\sqrt{x-5}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{3x-12}}$?

А

68. Найти значение корня:

1) $\sqrt{1000}$; 2) $\sqrt[4]{81}$; 3) $\sqrt[5]{32}$; 4) $\sqrt[6]{1}$; 5) $\sqrt[7]{-1}$; 6) $\sqrt[8]{0}$;

7) $\sqrt[3]{0{,}001}$; 8) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$.

69. Какие из приведенных ниже корней можно назвать арифметическими:

1) $\sqrt[3]{216}=6$; 2) $\sqrt[3]{-64}=-4$; 3) $\sqrt[4]{625}=5$; 4) $\sqrt[9]{-512}=-2$;

5) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$; 6) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{2}$?

Б

70. Найти значение выражения:

1) $7\sqrt[3]{64}$; 2) $0{,}2\sqrt[5]{32}+\sqrt[3]{-0{,}008}$; 3) $17-5\sqrt[3]{0{,}000216}$;

4) $10\sqrt[3]{(-2)^3}$.

71. Представить корень нечетной степени из отрицательного числа через арифметический корень:

1) $\sqrt[3]{-7}$; 2) $\sqrt[3]{-8}$; 3) $\sqrt[5]{-2a}$, где $a>0$.

В

72. 1) Объяснить равенство:

а) $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$; б) $\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}$;

2) Найти арифметическое значение корня $\sqrt{a^2-12a+36}$;

3) Какие значения принимает выражение $\frac{\sqrt[n]{a^n}}{a}$, если $a>0$? $a<0$?

А

73. Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{100}$; 2) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$; 3) $\sqrt[5]{x^8}\cdot\sqrt[5]{x^7}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$;

5) $\frac{\sqrt[5]{-2}}{\sqrt[5]{-64}}$; 6) $\frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{32}}$.

74. Вычислить:

1) $\sqrt[3]{8\cdot125}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$; 3) $\sqrt[4]{3\frac{3}{8}\cdot1\frac{1}{2}}$; 4) $\sqrt[5]{12:\frac{4}{81}}$.

75. Преобразовать выражение:

1) $(\sqrt[10]{a^3})^3$; 2) $(\sqrt[11]{5})^2$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$.

76. Упростить выражение (понизить степень радикала):

1) $\sqrt[4]{7^2}$; 2) $\sqrt[18]{36^2}$; 3) $\sqrt[9]{5^6}$; 4) $\sqrt[40]{a^{16}b^{24}c^{32}}$.

77. Привести радикалы к общему показателю:

1) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{3}$; 2) $\sqrt[3]{4a^2}$ и $\sqrt{2a}$.

78. Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{0{,}196}\cdot\sqrt[3]{1{,}4}\cdot\sqrt[3]{10000}$; 2) $\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{500000}}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{52\cdot4\cdot2\cdot243}{81\cdot39}}$;

4) $(\sqrt[6]{4})^3$; 5) $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$.

79. Упростить выражение $\sqrt{x^8+2x^4y^4+y^8}$.

80. Вычислить:

1) $(5\sqrt[3]{40}-10\sqrt[3]{5})\cdot0{,}5\sqrt[3]{25}$;

2) $\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{6})+\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{6})-\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

81. Расположить в порядке возрастания числа: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$.

82. Упростить выражение:

1) $\sqrt[m+n]{a^{m^2-n^2}}$; 2) $\sqrt[a-b]{a^{a^2-2ab+b^2}}$;

3) $a+2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}-4\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{a^2}-3\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{a^3}$.

83. Выполнить действие:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$; 2) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$;

3) $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})\cdot(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$;

4) $\sqrt{(5-a)^2}$, если $a\ge5$;

5) $\sqrt{1-2x+x^2}$, если $x=4$ и $x=\frac{1}{2}$.

84. Доказать, что

$$2a-\sqrt{(a-3)^2}=\begin{cases}3a-3, \text{ если } a<3;\\ a+3, \text{ если } a>3.\end{cases}$$

85. Определить знак выражения:

1) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[5]{5}-\sqrt[6]{6}$.

86. Упростить выражение:

$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot(-\sqrt[3]{-2-\sqrt{3}})$.

А

87. Вынести множитель за знак радикала:

1) $\sqrt[3]{m^8n^2}$; 2) $\sqrt[4]{16a^3b^{11}}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{32a^2b^6}{243c^7}}$;

Б

4) $\sqrt[3]{24(m^2-n^2)\cdot(m+n)^2}$; 5) $\sqrt[n]{a^{2n+3}}$; 6) $\sqrt[n+1]{a^{2n^2-2}}$;

7) $\sqrt[n]{a^{nx+2}b^{3n}z^3}$.

В

88. Преобразовать выражение, если $x>0$ и $c>0$:

$$\frac{2x^3}{c^2}\sqrt[4]{\frac{0,25c^3}{2x}} .$$

Какой результат получим, если $x<0$ и $c<0$? Могут ли x и c иметь разные знаки?

89. Упростить выражение $\sqrt[n]{a^{n+1}b^n-a^nb^{n+1}}$.

90. При каких значениях x справедливо тождество

$\sqrt{x^2-x^4}=-x\sqrt{1-x^2}$?

А

91. Внести множитель под знак радикала:

1) $2\sqrt[3]{3}$; 2) $3\sqrt[4]{\frac{1}{9}}$; 3) $2\sqrt[5]{\frac{1}{8}}$; 4) $a\sqrt[3]{2}$, где $a>0$;

5) $b\sqrt[4]{5}$, где $b>0$; 6) $(a+b)\sqrt{a+b}$.

92. Упростить выражение:

1) $\sqrt{a\sqrt{a}}$, если $a\geq0$; 2) $\sqrt[3]{2\sqrt{5}}$; 3) $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}$, где $x\geq0$;

4) $\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}$, где $a\geq0$.

93. Освободиться от дроби под корнем:

1) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c^6}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{m}{a^2+b^2}}$.

94. Внести множитель под знак радикала:

1) $2a^3\sqrt[4]{0{,}25b}$; 2) $(a+b)\sqrt[3]{\frac{3a^2}{a^2-b^2}}$.

95. Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{b\sqrt[3]{b}}$, где $b \geq 0$; 2) $(2-a)\sqrt{\frac{2a}{a-2}}$, где $a > 2$.

96. Сравнить числа:

1) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$; 2) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$.

97. Внести множитель под знак радикала:

1) $-\frac{2}{x-y}\sqrt{\frac{y^2-x^2}{2}}$, где $0 < x < y$; 2) $2(x-y)\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3(x-y)}$.

98. Найти значение выражения

$$\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\ .$$

99. Доказать, что при $a > 0$ справедливо равенство:

$$\sqrt[n+1]{a\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}\ .$$

100. Доказать, что при $a > 0$ справедливо равенство:

$$\sqrt[2n+2]{a^3\sqrt[n]{a^3}} = \sqrt[2n]{a^3}\ .$$

101. Можно ли утверждать, что выражения $\sqrt[10]{a^5}$, $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$, $\sqrt[4]{a^6b^5}$ являются радикалами упрощенного вида?

102. Свести к упрощенному виду корень:

1) $x\sqrt{\frac{x}{y}}$; 2) $y\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{40a^4}{bc^2}}$.

103. Упростить корень:

1) $\sqrt[3]{\frac{a}{a^2+b^2+2ab}}$; 2) $\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{ab}}$.

104. Свести к упрощенному виду выражение:

1) $\frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{y^{3n+2}}{x^{n-2}}}$; 2) $(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2+(\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3})^2$ $(a>0,\ x>0)$.

105. Упростить $\frac{x^2}{2-x}\sqrt{\frac{4(1-x)}{x^3}+\frac{1}{x}}$, если $x < 2$. Проверить, что при $0 < x < 2$ данное выражение преобразуется в $\sqrt{x}$. Доказать, что при $x \le 0$ и $x = 2$ оно теряет смысл.

А

106. Подобны ли радикалы:
1) $5\sqrt[3]{4}$ и $0{,}7\sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt[6]{7}$ и $\sqrt[6]{15}$;

4) $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$ и $\sqrt[3]{72}$?

107. Доказать подобие радикалов:

1) $\sqrt[3]{250}$ и $\sqrt[6]{4\,000\,000}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}}$ и $\sqrt[5]{a^3b^3}$.

Б

108. Доказать подобие радикалов:
$2\sqrt[3]{\frac{a+b}{a^2}}$ и $\sqrt[3]{a^2+ab}$.

109. Подобны ли радикалы:
$\sqrt[4]{\frac{a+b}{b^2}}$ и $5\sqrt[4]{ab^2+1}$?

110. Вычислить $x+\sqrt{(x-1)^2}$ при $x = 5$ и $x = \frac{1}{2}$.

111. Доказать подобие радикалов:
$\sqrt{\frac{1}{m}-n}$; $\sqrt{\frac{n^2-mn^7}{mn^2}}$; $\sqrt{m^3-m^4n}$, где $m > 0$, $n > 0$, $mn < 1$.

112. Подобны ли радикалы:
1) $\sqrt[4]{4^{2n+1}}$ и $\sqrt{50}$; 2) $\sqrt[n]{x^{3+n}y^{3+n}}$ и $\sqrt[n]{\frac{y^2}{x^{2n-3}}}$?

Выполнить действия:

А

113. 1) $3\sqrt[5]{2a^2}\cdot 5\sqrt[5]{10a}\cdot 7\sqrt[5]{24a}$; 2) $8\sqrt[7]{14a^6}:10\sqrt[7]{ab^3}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2ab}\right)^3$.

Б

114. 1) $15\sqrt[13]{a^9}:5\sqrt[13]{a^4}+12\sqrt[13]{a^2}\cdot 0{,}25\sqrt[13]{a^3}$;

2) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{a^5b}:\sqrt[8]{a^7b^3}$; 3) $\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}\right)^2$.

В

115. 1) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{2a}\cdot\sqrt[5]{5a^2}}$; 2) $\sqrt{\frac{5\sqrt[3]{0,001m^2}}{4\sqrt[4]{m}}+\frac{7}{8}\sqrt[12]{m^5}}$;

3) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a^2-b}$.

Освободить от радикалов знаменатель дроби:

А

116. 1) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a^2}{b\sqrt{a}}$; 3) $\frac{3a^2}{\sqrt[3]{a}}$; 4) $\frac{m\sqrt{n}}{2n\sqrt{m}}$; 5) $\frac{9}{5-\sqrt{7}}$;

6) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Б

117. 1) $\frac{13}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}$; 2) $\frac{5a}{a\sqrt{7}-2\sqrt{a}}$; 3) $\frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{5}}$;

4) $\frac{7\sqrt{a}-2\sqrt{b}}{7\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$; 5) $\frac{7}{\sqrt[3]{2}-1}$; 6) $\frac{a^3-x^3}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$.

В

118. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; 2) $\frac{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{x^2+a^2}}$.

119. Освободить от радикалов числитель дроби:

А

1) $\frac{3\sqrt[7]{a^4}}{2a^2b}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+1}{5}$; 3) $\frac{3\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}+2}$;

Б

4) $\frac{3\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{11}$; 5) $\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}$;

В

6) $\frac{4\sqrt{6}+\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{3}$; 7) $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

§ 17. Иррациональные уравнения и неравенства

Иррациональные уравнения.

Уравнения, в которых неизвестное содержится под знаком корня, называют иррациональными.

Иначе говоря, уравнение называют иррациональным, если в нем кроме действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень с натуральным показателем встречается также извлечение корня из алгебраических выражений, содержащих неизвестное. Корни, входящие в состав уравнения, будем считать арифметическими.

Примерами иррациональных уравнений являются: $\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{8-x} + x = 2$; $\sqrt[3]{2x+7} = 3$; $3 - \sqrt[4]{5x+1} = 1$; $\sqrt{x+\sqrt{x^2-5}} = 2$ и др.

Любое иррациональное уравнение можно преобразовать в целое алгебраическое уравнение, которое является следствием исходного.

Доказательство этого утверждения в общем виде сложное, и мы ограничимся рассмотрением отдельных случаев.

При решении иррациональных уравнений, содержащих выражения с неизвестными под знаком квадратного корня, стараются избавиться от корней, возводя в квадрат обе части уравнения.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{8-x} + x = 2$.

Р е ш е н и е. Оставим радикал в левой части уравнения, а остальные его члены перенесем в правую часть: $\sqrt{8-x} = 2-x$.

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$(\sqrt{8-x})^2 = (2-x)^2$, отсюда $8 - x = 4 - 4x + x^2$.

Приведем полученное уравнение к нормальному виду и решим его: $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

П р о в е р к а. $x_1 = -1$. В левой части имеем:

$\sqrt{8-(-1)} + (-1) = \sqrt{8+1} - 1 = \sqrt{9} - 1 = 3 - 1 = 2$.

Правая часть равна 2.

Итак, $x = -1$ — корень данного иррационального уравнения.

Пусть $x_2 = 4$. Левая часть: $\sqrt{8-4} + 4 = \sqrt{4} + 4 = 6$.

Правая часть равна 2; $6 \neq 2$.

Итак, корень $x = 4$ является посторонним для данного иррационального уравнения, поэтому мы его отбрасываем.

Как возник посторонний корень? Чтобы выяснить это, рассмотрим вопрос в общем виде.

Пусть дано уравнение $A = B$, где A и B — некоторые выражения, которые содержат неизвестное. После возведения в квадрат обеих частей уравнения получим: $A^2 = B^2$, или $(A + B)(A - B) = 0$.

Имеем два уравнения: $A - B = 0$, т. е. $A = B$ и $A + B = 0$, т. е. $A = -B$.

Первое из этих уравнений такое же, как исходное, а корни второго (если они существуют) могут отличаться от корней данного. Тогда они являются посторонними относительно уравнения $A = B$.

Поэтому, если решая уравнение, обе его части возводят в квадрат (или в другую степень), то после решения полученного уравнения следует выбрать из его корней только те, которые удовлетворяют первоначальное уравнение, остальные корни будут посторонними.

Вернемся к уравнению $\sqrt{8-x} + x = 2$. Из проведенного исследования следует, что посторонний корень $x = 4$ должен удовлетворять уравнение $\sqrt{8-x} = -(2 - x)$. Это действительно так, потому что $\sqrt{8-4} = -(2 - 4)$; $2 = 2$.

Если возвести в квадрат обе части данного уравнения, то посторонних корней не будет, если уравнение $A = -B$ не имеет корней.

В отдельных случаях, не решая иррационального уравнения, можно выяснить, что оно не имеет корней.

Например: $\sqrt{x-5} = -2$ — уравнение не имеет корней, т. к. арифметический корень не может быть отрицательным.

Уравнение $2 - \sqrt{x+10} = 6$ не имеет корней: этот случай становится очевидным, если уравнение записать в виде $\sqrt{x+10} = -4$.

$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = 0$ — уравнение не имеет корней, т. к. $\sqrt{x+2}$ и $\sqrt{x-2}$ не могут быть равными ни при каких значениях x.

$\sqrt{x-5} - \sqrt{4-x} = 3$ — первый радикал имеет смысл, когда $x - 5 \geq 0$, т. е. $x \geq 5$, а второй, когда $4 - x \geq 0$, т. е. $x \leq 4$.

Эти неравенства несовместны, следовательно, данное иррациональное уравнение не имеет корней.

Рассмотрим еще несколько примеров решения иррациональных уравнений.

Пример 1. $\sqrt{4x+8} + \sqrt{3x-2} = 2$.

Р е ш е н и е. Имеем два радикала, избавиться от которых одновременным возведением в квадрат невозможно. Поэтому отделим один из радикалов, а потом возведем обе части уравнения в квадрат. Имеем:

$$\sqrt{4x+8} = 2 - \sqrt{3x-2}, \ (\sqrt{4x+8})^2 = (2 - \sqrt{3x-2})^2,$$

$$4x + 8 = 4 - 4\sqrt{3x-2} + 3x - 2, \ 4\sqrt{3x-2} = -x - 6,$$

$$(4\sqrt{3x-2})^2 = (-(x+6))^2; \ 16(3x-2) = x^2 + 12x + 36,$$

$$x^2 - 36x + 68 = 0, \text{ отсюда } x_1 = 2; \ x_2 = 34.$$

Эти оба корня для данного иррационального уравнения являются посторонними (проверьте это).

Заметим, что при решении уравнений нет необходимости заранее выяснять, появятся ли посторонние корни при возведении в квадрат. Возводим в степень столько раз, сколько необходимо для исчезновения радикалов, и проверяем, удовлетворяют ли корни полученного уравнения исходное.

Пример 2. $\sqrt{2x+15} - \sqrt{x-1} = 3.$

Р е ш е н и е. $(\sqrt{2x+15})^2 = (3 + \sqrt{x-1})^2,$

$2x + 15 = 9 + 6\sqrt{x-1} + x - 1, \ x + 7 = 6\sqrt{x-1},$

$(x + 7)^2 = (6\sqrt{x-1})^2, \ x^2 - 22x + 85 = 0; \ x_1 = 5, \ x_2 = 17.$

Проверим, являются ли числа 5 и 17 корнями исходного уравнения.

При $x_1 = 5$ в левой части получим $\sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3.$ Правая часть равна 3, т. е. имеем $3 = 3$.

При $x_2 = 17$, в левой части получим: $\sqrt{49} - \sqrt{16} = 3; 3 = 3.$

Итак, данное иррациональное уравнение имеет два корня: $x_1 = 5$ и $x_2 = 17$.

Рассмотрим пример уравнения с тремя радикалами.

Пример 3. $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = \sqrt{5x-10}.$

Р е ш е н и е. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{5x-10})^2,$$

$$4(x - 1) - 4\sqrt{(x-1)(x+2)} + x + 2 = 5x-10.$$

Отделим радикал и приведем подобные:

$4\sqrt{(x-1)(x+2)} = 8, \ \sqrt{(x-1)(x+2)} = 2,$

$(\sqrt{(x-1)(x+2)})^2 = 2^2; \ (x - 1)(x + 2) = 4,$

$x^2 + x - 6 = 0, \ x_1 = -3, \ x_2 = 2.$

Проверим найденные корни по исходному уравнению.

1) $x_1 = -3$, в левой части выражение $2\sqrt{-3-1} - \sqrt{-3+2}$ не имеет смысла. Значит, $x_1 = -3$ — посторонний корень;

2) $x_2 = 2$, левая часть $2\sqrt{2-1} - \sqrt{2+2} = 0$, правая часть $\sqrt{5\cdot 2-10} = \sqrt{10-10} = 0$.

Следовательно, $x_2 = 2$ — корень данного иррационального уравнения.

Пример 4. $2\sqrt[3]{2x+x^3+15} - x = x + 2$.

Р е ш е н и е. Отделяем радикал:

$2\sqrt[3]{2x+x^3+15} = 2x + 2$, $\sqrt[3]{2x+x^3+15} = x + 1$.

Освободимся от радикала:

$(\sqrt[3]{2x+x^3+15})^3 = (x + 1)^3$; $2x + x^3 + 15 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

$3x^2 + x-14 = 0$; $x_1 = -2\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$.

П р о в е р к а. $x_1 = -2\frac{1}{3}$, левая часть:

$$2\sqrt[3]{2\cdot\left(-2\frac{1}{3}\right)+\left(-2\frac{1}{3}\right)^3+15} + 2\frac{1}{3} = 2\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}} + 2\frac{1}{3} =$$

$$= 2\sqrt[3]{-\frac{64}{27}} + 2\frac{1}{3} = -2\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Правая часть $-2\frac{1}{3} + 2 = -\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, т. е. $x_1 = -2\frac{1}{3}$ является корнем данного иррационального уравнения; $x_2 = 2$, левая часть $2\sqrt[3]{4+8+15} - 2 = 2\sqrt[3]{27} - 2 = 2\cdot 3 - 2 = 4$.

Правая часть $2 + 2 = 4$; $4 = 4$, т. е. $x_2 = 2$ также удовлетворяет данное уравнение.

Итак, $x_1 = -2\frac{1}{3}$; $x_2 = 2$.

Пример 5. $\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 3 = 0$.

Р е ш е н и е. 1-й с п о с о б. Представим уравнение в виде $4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} = 3$ и возведем обе части в куб. При этом формулу куба разности используем в таком виде:

$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

Имеем: $64x - x^2 - 12\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\,(4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}) = 27$. Учитывая, что $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^3}$ и $4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} = 3$ (это следует из условия), переделанное уравнение имеет вид: $64x - x^2 - 12x\cdot 3 = 27$, $x^2 - 28x + 27 = 0$. $x_1 = 1$, $x_2 = 27$ — корни этого уравнения.

Подставляя в исходное уравнение его корни, убеждаемся, что они его удовлетворяют.

Как видим, рассмотренный способ решения очень громоздкий.

2-й способ. Принимая во внимание, что $(\sqrt[3]{x})^2 = \sqrt[3]{x^2}$, можно ввести новую переменную, заменив $\sqrt[3]{x} = y$. Тогда $\sqrt[3]{x^2} = y^2$ и относительно новой переменной уравнение будет иметь вид: $y^2 - 4y + 3 = 0$. Отсюда $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Но $x = y^3$, следовательно, $x_1 = 1$, $x_2 = 27$.

Рассмотрим решения еще нескольких примеров иррациональных уравнений способом введения вспомогательной неизвестной.

Пример 6. $x^2 + \sqrt{x^2 - 9} = 21$.

Решение. Отнимаем от обоих частей уравнения по 9: $x^2 - 9 + \sqrt{x^2 - 9} = 12$.

Введем вспомогательную неизвестную: $\sqrt{x^2 - 9} = y$, $y \geq 0$.

Имеем: $y^2 + y - 12 = 0$; $y_1 = -4$, $y_2 = 3$.

Корень $y_1 = -4$ отбрасываем как посторонний.

Подставляя второе значение y в равенство $\sqrt{x^2 - 9} = y$, получим: $\sqrt{x^2 - 9} = 3$; $x^2 - 9 = 9$; $x = \pm 3\sqrt{2}$.

Пример 7. $2\sqrt{x^2 - 3x + 11} - \sqrt{x^2 - 3x + 3} = 5$.

Решение. Введем вспомогательную неизвестную: $y = \sqrt{x^2 - 3x + 11}$, тогда $x^2 - 3x + 11 = y^2$ и $x^2 - 3x + 3 = y^2 - 8$.

Таким образом, относительно новой неизвестной данное уравнение имеет вид $2y - \sqrt{y^2 - 8} = 5$. Освободившись от радикала, получим $3y^2 - 20y + 33 = 0$, отсюда $y_1 = 3$, $y_2 = \frac{11}{3}$. Оба корня удовлетворяют квадратное уравнение (проверьте это).

Далее, принимая во внимание, что $x^2 - 3x + 11 = y^2$, получим два уравнения относительно x: $x^2 - 3x + 11 = 3^2$ и $x^2 - 3x + 11 = \left(\frac{11}{3}\right)^2$, или после упрощений $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $x^2 - 3x - \frac{22}{9} = 0$.

Первое уравнение имеет корни: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, а второе — $x_{3,4} = \frac{9 \pm 13}{6}$.

Все четыре корня удовлетворяют начальное уравнение. В этом можно убедиться, подставляя их значения.

$$x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_{3,4} = \frac{9 \pm 13}{6}.$$

Пример 8. $\sqrt{1{,}5 - x\sqrt{x^2 - 5{,}25}} = 2.$

Р е ш е н и е. Возведем обе части уравнения в квадрат и выполним преобразования: $1{,}5 - x\sqrt{x^2 - 5{,}25} = 4$, $x\sqrt{x^2 - 5{,}25} = -2{,}5$, $x^2(x^2 - 5{,}25) = 6{,}25$, $x^4 - 5{,}25x^2 - 6{,}25 = 0$.

Введем обозначения $x^2 = y$. Имеем: $y^2 - 5{,}25y - 6{,}25 = 0$; $y_1 = -1$; $y_2 = 6{,}25$.

Но $x^2 \geq 0$, поэтому $y_1 = -1$ отбрасываем. Остается $x^2 = 6{,}25$, отсюда $x_1 = -2{,}5$; $x_2 = 2{,}5$. Если $x = -2{,}5$, то $\sqrt{1{,}5 - x\sqrt{x^2 - 5{,}25}} = \sqrt{1{,}5 + 2{,}5\sqrt{6{,}25 - 5{,}25}} = \sqrt{4} = 2$. Если $x = 2{,}5$, то $\sqrt{1{,}5 - x\sqrt{x^2 - 5{,}25}} = \sqrt{1{,}5 - 2{,}5\sqrt{6{,}25 - 5{,}25}} = \sqrt{-1}$, но такого числа среди действительных чисел не существует. Итак, данное иррациональное уравнение имеет единственный корень $x = -2{,}5$.

Пример 9. $x^2 - x - \sqrt{x^2 - x + 13} = 7.$

Р е ш е н и е. Прибавляя к обеим частям уравнения по 13, имеем: $(x^2 - x + 13) - \sqrt{x^2 - x + 13} = 20$.

Введем обозначения $\sqrt{x^2 - x + 13} = y$, получим квадратное уравнение относительно y: $y^2 - y - 20 = 0$, корни которого $y_1 = -4$ и $y_2 = 5$. Но $\sqrt{x^2 - x + 13} \geq 0$. Значит, $y_1 = -4$ отбрасываем и берем $\sqrt{x^2 - x + 13} = 5$. Имеем: $x^2 - x + 13 = 25$, $x^2 - x - 12 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

Если $x = -3$, то $9 + 3 - \sqrt{9 + 3 + 13} = 12 - 5 = 7$.

Если $x = 4$, то $16 - 4 - \sqrt{16 - 4 + 13} = 12 - 5 = 7$.

Таким образом, данное уравнение имеет два корня: $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$.

Пример 10. $\sqrt{x + 6} - \sqrt{x - 7} = 5.$

Р е ш е н и е. Умножим обе части уравнения на $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 7}$. Получим:

$$(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-7})(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7}) = 5(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7}),$$

$$x + 6 - x + 7 = 5(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7}),$$

отсюда $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7} = \frac{13}{5}$.

Прибавляя почленно полученное уравнение к данному, получим $2\sqrt{x + 6} = \frac{38}{5}$. Отсюда $x = \left(\frac{19}{5}\right)^2 - 6 = 8\frac{11}{25}$.

Подставим это значение в данное уравнение и убедимся, что оно его не удовлетворяет (сделайте это самостоятельно).

Итак, данное уравнение не имеет решений. Как видим, кроме общих подходов при решении иррациональных уравнений можно использовать искусственные способы.

Системы иррациональных уравнений. Если среди уравнений системы имеются иррациональные, то для их решения, как правило, освобождаются от иррациональности. При этом применяют способы, которые использовали при решении иррациональных уравнений. Приведем примеры решения систем иррациональных уравнений.

Пример 1. $\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 20, \\ x^2 + y^2 = 136. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Введем новую переменную $z = \sqrt{x+y}$. Тогда $x + y = z^2$, и первое уравнение системы будет иметь вид: $z^2 + z - 20 = 0$, отсюда $z_1 = -5$, $z_2 = 4$.

Выражение $\sqrt{x+y} = -5$ не имеет смысла. Из равенства $\sqrt{x+y} = 4$ находим $x + y = 16$.

Выразим из этого уравнения x и подставим во второе уравнение системы: $x = 16 - y$, $(16 - y)^2 + y^2 = 136$, $256 - 32y + y^2 + y^2 = 136$, $2y^2 - 32y + 120 = 0$, $y^2 - 16y + 60 = 0$.

Корни этого уравнения: $y_1 = 6$, $y_2 = 10$.

Найдем x: $x_1 = 16 - y_1$; $x_1 = 10$; $x_2 = 16 - y_2$; $x_2 = 6$.

О т в е т. (10; 6), (6; 10).

Пример 2. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{y-3} = 5, \\ x + y = 37. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Введем обозначения $\sqrt[3]{x+1} = p$, $\sqrt[3]{y-3} = q$, тогда $x + 1 = p^3$, $y - 3 = q^3$.

Прибавляя почленно эти уравнения, получим: $x + y - 2 = p^3 + q^3$, или $x + y = p^3 + q^3 + 2$. Из второго уравнения системы имеем: $37 = p^3 + q^3 + 2$, или $p^3 + q^3 = 35$. Первое уравнение системы запишем так: $p + q = 5$.

Примем во внимание тождество $(p + q)^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q)$ и подставим вместо $p^3 + q^3$ и $p + q$ их значения, а именно: $p^3 + q^3 = 35$, $p + q = 5$. Таким образом, $5^3 = 35 + 3pq \cdot 5$; $15pq = 90$; $pq = 6$. Имеем систему уравнений: $\begin{cases} p + q = 5, \\ pq = 6. \end{cases}$

Отсюда $p_1 = 2$, $q_1 = 3$, $p_2 = 3$, $q_2 = 2$.

Вернувшись к неизвестным x и y, получим:

$$\sqrt[3]{x+1} = 2,\ x + 1 = 8;\ \sqrt[3]{y-3} = 3,\ y - 3 = 27;$$
$$\sqrt[3]{x+1} = 3,\ x + 1 = 27;\ \sqrt[3]{y-3} = 2,\ y - 3 = 8.$$

Имеем две системы уравнений.

$$\begin{cases} x+1=8, \\ y-3=27; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+1=27, \\ y-3=8. \end{cases}$$

Решениями первой системы являются $x = 7$, $y = 30$, а второй $x = 26$, $y = 11$.

Ответ. (7; 30), (26; 11).

Пример 3. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x+y=13. \end{cases}$

Решение. Запишем сумму $x + y$ в виде $x + y = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{xy}$.

Из первого и второго уравнений системы имеем:

$$13 = \left(\frac{5}{6}\sqrt{xy}\right)^2 - 2\sqrt{xy},\ 13 = \frac{25}{36}xy - 2\sqrt{xy},$$
$$\frac{25}{36}xy - 2\sqrt{xy} - 13 = 0.$$

Обозначив $\sqrt{xy} = z$, получим $25z^2 - 72z - 13 \cdot 36 = 0$,

$$z_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 + 36 \cdot 13 \cdot 25}}{25};\ z_{1,2} = \frac{36 \pm 6\sqrt{36+325}}{25} = \frac{36 \pm 6 \cdot 19}{25};$$

$$z_1 = \frac{36 - 6 \cdot 19}{36} \text{ не удовлетворяет; } z_2 = \frac{36 + 6 \cdot 19}{25} = \frac{36 + 114}{25},$$

$$z_2 = \frac{150}{25} = 6.$$

Итак, $\sqrt{xy} = 6$. Подставим значение $\sqrt{xy}$ в первое уравнение системы. Имеем $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \frac{5}{6} \cdot 6$; $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 5$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=6, \end{cases}$$

получим: $\sqrt{x} = 2$, $\sqrt{y} = 3$ и $\sqrt{x} = 3$, $\sqrt{y} = 2$. Отсюда $x_1 = 4$, $y_1 = 9$; $x_2 = 9$, $y_2 = 4$.

Ответ. (4; 9), (9; 4).

Пример 4. $\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x}+\sqrt[4]{5-y}=3, \\ 5x-y=11. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Обозначим $\sqrt[4]{1+5x} = u$,

$\sqrt[4]{5-y} = v$, тогда $\begin{cases} u+v=3, \\ u^4+v^4=17. \end{cases}$

Запишем второе уравнение в таком виде:

$(u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = 17$; $((u + v)^2 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 = 17$, или

$(9 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 = 17$; $2u^2v^2 - 36uv + 64 = 0$;

$(uv)^2 - 18uv + 32 = 0$; $uv = 2$; $uv = 16$;

1) $\begin{cases} uv=2, \\ u+v=3. \end{cases}$ $u^2 - 3u + 2 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 2$.

Отсюда $\begin{cases} u_1=1, \\ v_1=2; \end{cases}$ или $\begin{cases} u_2=2, \\ v_2=1. \end{cases}$

Итак, $\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x}=1; x=0; \\ \sqrt[4]{5-y}=2; y=-11; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x}=2; \\ \sqrt[4]{5-y}=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases}$

2) $\begin{cases} uv=16, \\ u+v=3. \end{cases}$ $u^2 - 3u + 16 = 0$ — нет решений.

О т в е т. (0; –11), (3; 4).

Пример 5. $\begin{cases} (x+y\sqrt{x}+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65, \\ (x-y\sqrt{x}+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Левые части уравнений системы запишем в виде:

$$\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y\sqrt{x}}{y^2}+1\right)\cdot y^2\sqrt{x^2+y^2}=65,$$

$$\left(\frac{x}{y^2}-\frac{y\sqrt{x}}{y^2}+1\right)\cdot y^2\sqrt{x^2+y^2}=185.$$

Разделим почленно уравнения системы:

$$\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y\sqrt{x}}{y^2}+1\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{y\sqrt{x}}{y^2}+1\right)=65:185.$$

Упростим это уравнение:

$$37\left(\frac{x}{y^2}+\frac{\sqrt{x}}{y}+1\right)=13\left(\frac{x}{y^2}-\frac{\sqrt{x}}{y}+1\right).$$

Отсюда $24\frac{x}{y^2}+50\frac{\sqrt{x}}{y}+24=0$, или $12\frac{x}{y^2}+25\frac{\sqrt{x}}{y}+12=0$.

Введем новую неизвестную $\frac{\sqrt{x}}{y}=z$. Получим:

$$12z^2 + 25z + 12 = 0,$$

$$z_{1,2}=\frac{-25\pm\sqrt{625-4\cdot12\cdot12}}{24}=\frac{-25\pm\sqrt{49}}{24}=\frac{-25\pm7}{24},$$

$$z_1=\frac{-32}{24}=-\frac{4}{3},\ z_2=\frac{-18}{24}=-\frac{3}{4},\ z_1=-\frac{4}{3},\ z_2=-\frac{3}{4}.$$

Возьмем $z_1=-\frac{4}{3}$ и найдем $\frac{x}{y^2}$. Имеем $\frac{x}{y^2}=\frac{16}{9}$, отсюда $y^2=\frac{9x}{16}$. Подставим значения $\frac{x}{y^2}$, $\frac{\sqrt{x}}{y}$ и y^2 в первое уравнение системы:

$$\left(\frac{16}{9}-\frac{4}{3}+1\right)\frac{9}{16}\sqrt{x+\frac{9x}{16}}=65,\ \frac{13}{9}\cdot\frac{9x}{16}\sqrt{\frac{25x}{16}}=65.$$

Отсюда $\frac{13x}{16}\cdot\frac{5}{4}\sqrt{x}=65$, $\frac{x}{64}\sqrt{x}=1$, $\frac{x^2}{64^2}x=1$, $x^3=64^2$,

$$x^3=(4^3)^2=(4^2)^3,\ x=4^2,\ x=16.$$

Найдем y. Имеем: $\frac{\sqrt{16}}{y}=-\frac{4}{3}$, откуда $y=-3$.

Аналогично, подставляя значение $z_2=-\frac{3}{4}$, найдем

$$x=9,\ y=-4.$$

Ответ. (16; −3), (9; −4).

Иррациональные неравенства.

Как и в иррациональных уравнениях, все корни, которые входят в неравенства, — арифметические.

К простейшим иррациональным неравенствам относятся неравенства вида $\sqrt[n]{f(x)}<g(x)$ и $\sqrt[n]{f(x)}>g(x)$, или $\sqrt[n]{f(x)}\le g(x)$ и $\sqrt[n]{f(x)}\ge g(x)$.

Решения неравенств первого вида сводится к решению системы рациональных неравенств

$$\begin{cases}f(x)\ge0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g^n(x),\end{cases}$$

т. к., по определению арифметического корня, и подкоренное выражение, и значения корня неотрицательные. Поскольку, по условию, значения корня меньше выражения $g(x)$, то последний должен быть положительным. Третье неравенство системы получаем после возведения обеих частей данного неравенства в степень, которая равна степени корня.

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-5x$.

Р е ш е н и е. Данное неравенство сводится к системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2-3x-10 \ge 0, \\ 8-5x > 0, \\ x^2-3x-10 < (8-5x)^2. \end{cases}$$

Решим эту систему. Имеем:

$$\begin{cases} (x+2)(x-5) \ge 0, \\ x < \dfrac{8}{5}, \\ 24x^2-77x+74 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -\infty < x \le -2 \text{ или } 5 \le x < +\infty, \\ x < \dfrac{8}{5}, \\ -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Множеством решений последней системы является промежуток $-\infty < x \le -2$.

О т в е т. $(-\infty; -2\,]$.

При решении неравенств второго вида необходимо рассмотреть два случая.

1) $g(x) < 0$. Неравенство $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ выполняется при любых значениях переменной x, при которых существует арифметический корень, т. е. при которых $f(x) \ge 0$. Итак, решение данного неравенства сводится к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

2) $g(x) \ge 0$. Неравенство $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ сводится к системе рациональных неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \\ f(x) > g^n(x). \end{cases} \qquad (2)$$

Множеством решений данного неравенства будет объединение множеств решений систем (1) и (2).

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x-10} > x-2$.

Р е ш е н и е.

1) Если $x-2<0$, то данное неравенство сводится к системе:

$$\begin{cases} x-2<0, \\ x^2-3x-10 \ge 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 2, \\ (x+2)(x-5) \ge 0. \end{cases}$$

Множеством решений последней системы является числовой промежуток $(-\infty; -2)$.

2) Если $x-2\geq 0$, то данное неравенство сводится к системе:

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ x^2-3x-10>(x-2)^2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\geq 2, \\ x>14. \end{cases}$$

Множеством решений этой системы является числовой промежуток $(14; +\infty)$.

Итак, множеством решений данного неравенства будет объединение числовых промежутков $(-\infty; -2)$ и $(14; +\infty)$.

О т в е т. $(-\infty; -2) \cup (14; +\infty)$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какое уравнение называют иррациональным? Привести пример.

2. Какой смысл имеют корни, входящие в иррациональное уравнение?

3. Почему иррациональное уравнение $\sqrt{x-3} = -2$ не имеет решений?

4. Как иррациональное уравнение заменить рациональным?

5. Какие преобразования иррациональных уравнений могут привести к появлению посторонних корней?

6. В чем заключается способ введения новой переменной при решении иррациональных уравнений?

7. Какие неравенства называются иррациональными?

8. Какой смысл имеют радикалы, входящие в иррациональное неравенство?

9. Всегда ли неравенство $f(x) < \varphi(x)$ равносильно неравенству $(f(x))^n < (\varphi(x))^n$?

У П Р А Ж Н Е Н И Я

Решить уравнение:

А

120. 1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x-3} = 5$; 3) $\sqrt{x} - 4 = 0$;

4) $\sqrt{2x-7} = 5$; 5) $\sqrt{2-x} = \sqrt{3-2x}$; 6) $\sqrt{x-a} = b$.

121. 1) $x + \sqrt{x+5} = 7$; 2) $3\sqrt{x+2} = 2x - 5$.

122. 1) $\sqrt{x-7} + \sqrt{17-x} = 4$; 2) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{4x+3} = 1$.

123. 1) $\sqrt{8x-5} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{6x+1}$;

2) $3\sqrt{x^2-4} + 1 = 3x + 7$.

Б

124. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{6x-11}$.

125. 1) $\frac{1}{\sqrt{x-3}}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x-6}$; 2) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{2-x}=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}$.

126. 1) $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$;

2) $\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5}$;

3) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}$;

4) $x^2-x+\sqrt{x^2-2x+6}=x+6$.

В

127. 1) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt{\frac{5x+2}{2x-4}}=\sqrt{\frac{7x-2}{3x-8}}$.

128. 1) $\sqrt{8-x}+\sqrt{5+x}=\sqrt{9+5x}+\sqrt{4-5x}$;

2) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{2}$.

129. 1) $\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{9+24x}}=\sqrt{3}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{3x+10}}+\frac{6}{\sqrt{(x+2)(3x+10)}}=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

130. 1) $x-\sqrt[3]{x^3-4x-7}=1$; 2) $\sqrt{4-x\sqrt{x^2+8}}=2-x$;

3) $x^2-9x+12=4\sqrt{x^2-9x+9}$;

4) $\sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x}=\frac{12a}{\sqrt{5a+x}}$.

Объяснить, почему данные иррациональные уравнения не могут иметь действительных корней:

А

131. 1) $\sqrt{2x^2-3x+5}=-4$; 2) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}+1=0$.

Б

132. 1) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+5}=1$; 2) $\sqrt{x-5}+\sqrt{2x-1}=2$.

133. 1) $\sqrt{x-3} = \sqrt{2x-3} + 1$;

2) $\sqrt{3x-7} - \sqrt{5x-11} = 2$.

Решить уравнение:

134. 1) $2x + 1 = 3\sqrt{x}$; 2) $1 - \sqrt{x} = 2 + x$ (для этих уравнений построить графики левой и правой частей).

135. 1) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$;

2) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$;

3) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$;

4) $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$.

136. 1) $\sqrt{3x^2-2x+15} + \sqrt{3x^2-2x+8} = 7$;

2) $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}} = \dfrac{21}{x}$, $x \neq 0$;

3) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$;

4) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$.

137. 1) $\sqrt[4]{x+8} - \sqrt[4]{x-8} = 2$;

2) $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3$;

3) $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1} + \dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1} = 16$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{3}$.

Решить систему уравнений:

138. 1) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{xy} = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y} = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}, \\ x + y = 10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 6y^2} = 2 + x, \\ 3x + 4y = 23. \end{cases}$

139. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{4}{3}, \\ xy = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \dfrac{5}{2}, \\ x + y = 25; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt{x}\sqrt[3]{y} = 12, \\ xy = 64; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3, \\ x - y = 63. \end{cases}$

В

140. 1) $\begin{cases} x + y = 130, \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1{,}5\sqrt[6]{xy}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \dfrac{a}{b}, \\ xy = (a^2 - b^2)^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19, \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} = 1 + 2\sqrt{x + 6y}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt[3]{x - y} = 6, \\ \sqrt[6]{(x + y)^3 (x - y)^2} = 8, \ (x > y). \end{cases}$

141. 1) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2 y + y^2 x = 20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 8a^2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0{,}5\sqrt{xy}, \\ x + y = 5. \end{cases}$

142. 1) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{y + z} = 3, \\ \sqrt{y + z} + \sqrt{z + x} = 5, \\ \sqrt{z + x} + \sqrt{x + y} = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3, \\ x + y = 17; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - y^2} = 6, \\ xy^2 = 6\sqrt{10}. \end{cases}$

143. 1) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy} + \sqrt{xy - y^2} = 3(x - y), \\ x^2 - y^2 = 41; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5, \\ x^2+y^2=13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12, \\ y\sqrt{x^2+y^2}=12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x-4}+\sqrt{y}+\sqrt{z+4}=6, \\ 2\sqrt{x-4}-\sqrt{y}-4\sqrt{z+4}=-12, \\ x+y+z=14. \end{cases}$

144. Решить неравенство:

1) $\sqrt{x-1}<7-x$; 2) $\sqrt{x^2-3x-10}>x-2$;

3) $\sqrt{x+2}>x$; 4) $3\sqrt{6+x-x^2}>4x-2$;

5) $\sqrt{5x-x^2-6}<3+2x$; 6) $\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x$.

§ 18. Обобщение понятия степени. Степенная функция

Степень с натуральным и целым показателем. Для обобщения понятия степени напомним основные понятия и формулы.

$a^n=\underbrace{aa\,\ldots\,a}_{n\text{ раз}}$, если n — натуральное число, $n>1$, $a^n=a$, если $n=1$; $a^n=1$, если $n=0$, $a\neq 0$; $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$, если n — целое число, $n<0$, $a\neq 0$.

Напомним свойства степени с целым показателем.

Перемножая степени одного и того же основания a ($a\neq 0$), их показатели складывают: $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

При делении степеней с одинаковыми основаниями a ($a\neq 0$) от показателя делимого отнимают показатель делителя:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Чтобы возвести в степень произведение, надо в эту степень возвести каждый сомножитель и результаты перемножить:

$$(abc)^n=a^nb^nc^n.$$

Иногда это равенство необходимо прочитать справа налево: чтобы умножить степени с одинаковыми показателями, достаточно перемножить основания и результат возвести в степень с тем же показателем: $a^nb^nc^n=(abc)^n$.

Чтобы возвести в степень дробь, следует возвести в эту степень числитель и знаменатель и первый результат разделить на второй:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Чтобы возвести в степень степень, надо показатели степеней перемножить, а основания степени оставить без изменения: $(a^m)^n = a^{mn}$.

Отметим, что в формулировках этих правил нигде не указывалось, каким должен быть показатель степени: натуральным числом или целым. Это потому, что множество целых чисел включает множество натуральных чисел как свою часть. Следовательно, приведенные правила касаются степеней с натуральным, нулевым и целым отрицательным показателями. Понятно, что для случая степени с нулевым и целым показателями ставится дополнительное условие, чтобы основание степени не равнялось нулю.

Степень с рациональным показателем. Введение степени с нулевым и отрицательным показателями было первым расширением понятия о степени. При этом новые определения степени с нулевым и отрицательным показателями были введены так, что свойства степени с натуральным показателем остались справедливыми и для степеней с целым показателем.

Введем понятие о степени, показателем которой может быть любое дробное (рациональное) число. Например, $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{2}{3}}$, $5^{0,9}$, в общем $a^{\frac{m}{n}}$, где $a > 0$, m — целое, а n — натуральное число.

Введение степени с дробным показателем будет дальнейшим расширением понятия о степени. Определение степени с дробным показателем $a^{\frac{m}{n}}$ должно быть таким, чтобы свойства степени с натуральным показателем остались справедливыми и для степеней с любым дробным показателем.

Определение степени с дробным показателем возникло в связи с обобщением правила извлечения корня в случае, когда показатель подкоренного выражения не делится на показатель корня.

Правило $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ было выведено из предположения, что m и n — натуральные, а m делится на n.

Теперь это правило будем применять и тогда, когда n — любое натуральное число, а m — любое целое число.

Определение 1. [illegible] a [illegible] n числ[illegible] m [illegible] a пок[illegible] $\frac{m}{n}$ [illegible] $\sqrt[n]{a^m}$ [illegible] $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Показателем корня является знаменатель, а показателем степени подкоренного выражения — числитель дробного показателя.

Если $a = 0$, а $\frac{m}{n}$ — дробное положительное число, то $a^{\frac{m}{n}} = 0$.

Согласно этим определениям имеем: $6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2}$; $0{,}3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{0{,}3^5}$; $3^{-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{3^{-1}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,7} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{17}{10}} = \sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{17}}$; $0^{\frac{1}{4}} = 0$.

Выражения $0^{-\frac{2}{5}}$, $(-4)^{\frac{3}{8}}$, $(-8)^{\frac{1}{2}}$ не имеют смысла.

Ограничение, которое накладывается на основание a ($a > 0$), необходимо при определении степени $a^{\frac{m}{n}}$. Действительно, если $a < 0$, а n — четное и m — нечетное, выражение $a^{\frac{m}{n}}$ не имеет смысла. Например, $(-5)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-5)^3} = \sqrt{-125}$ не существует.

Итак, введение степени с дробным показателем дает возможность сохранить правило извлечения корня из степени $\sqrt[n]{a^m}$ для случая, когда m не делится на n.

Однако можно дать определение степени с дробным показателем, не используя понятия корня.

Определение 2. $a^{\frac{m}{n}}$ ... a ... n ... a^m

По определению степени с дробным показателем, справедливо такое тождество: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$.

Определение 2 удобно применять для доказательства основных свойств степеней вида $a^{\frac{m}{n}}$. Приведем эти свойства без доказательств. Для любых положительных a и рациональных значений p и q

$$a^p a^q = a^{p+q}; \tag{1}$$
$$a^p : a^q = a^{p-q}; \tag{2}$$
$$(a^p)^q = a^{pq}. \tag{3}$$

Кроме того, если $a > 0$, $b > 0$ и p — рациональное, то имеют место тождества

$$(ab)^p = a^p b^p; \tag{4}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}. \tag{5}$$

Из свойства (1) следует, что для любого положительного a и любого рационального p $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

Из свойства (3) следует, что для любого рационального p $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$ ($a > 0$, n — натуральное число, $n \neq 1$).

Примеры.

1. Записать в виде степени с рациональным показателем такие выражения:

а) $a^{0,3}a^{-1}a^{2,7} = a^{0,3+(-1)+2,7} = a^2$;

б) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{8}}$; в) $b^{-\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{3}} = b^{-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}} = b^{-\frac{1}{2}}$;

г) $\left(a^{-\frac{5}{8}}\right)^{0,4} \cdot a^{0,25} = \left(a^{-\frac{5}{8}}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{-\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^0 = 1$.

2. Вычислить:

а) $5^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{-0,25} \cdot 5^{\frac{4}{5}} \cdot 5^{-0,75} = 5^{\frac{1}{5}+(-0,25)+\frac{4}{5}+(-0,75)} = 5^0 = 1$;

б) $4^3 \cdot 2^2 = (2^2)^3 \cdot 2^2 = 2^6 \cdot 2^2 = 2^8 = 256$.

3. Упростить:

а) $\left(\dfrac{a^{-\frac{2}{5}}}{b^{\frac{1}{7}}}\right)^{-3,5} = \dfrac{a^{\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot(-3,5)}}{\left(b^{\frac{1}{7}}\right)^{-3,5}} = \dfrac{a^{-\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)}}{b^{\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)}} = \dfrac{a^{\frac{7}{5}}}{b^{-\frac{1}{2}}} = \dfrac{a^{1,4}}{b^{-0,5}}$;

б) $\left(a^{\frac{5}{12}}\right)^{1,2} : \left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^{-1,5} = a^{\frac{5}{12}\cdot\frac{6}{5}} : a^{-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}} = 1$;

в) $\left(c^{-\frac{3}{7}}y^{-0,4}\right)^3 \cdot c^{\frac{2}{7}}y^{0,2} = c^{-\frac{9}{7}}y^{-\frac{6}{5}}c^{\frac{2}{7}}y^{\frac{1}{5}} = c^{-\frac{9}{7}+\frac{2}{7}}y^{-\frac{6}{5}+\frac{1}{5}} = c^{-1}y^{-1}$.

4. Найти значение выражения:

а) $(81 \cdot 16)^{-\frac{1}{4}} = (3^4 \cdot 2^4)^{-\frac{1}{4}} = 3^{4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} \cdot 2^{4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} = 3^{-1} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;

б) $100000^{0,2} \cdot 0,001^{\frac{1}{3}} = (10^5)^{\frac{1}{5}} \cdot (10^{-3})^{\frac{1}{3}} = 10 \cdot 10^{-1} = 1$.

5. Записать выражение в виде квадрата:

а) $a^{30} = (a^{15})^2$; б) $a^3 = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2$; в) $a^{-18} = (a^{-9})^2$; г) $a^{-3} = \left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^2$.

6. Записать выражение в виде степени с дробным показателем:

а) $\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[15]{x} = x^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{1}{15}} = x^{\frac{1}{5}+\frac{1}{15}} = x^{\frac{4}{15}}$;

б) $\sqrt[7]{y^2} \cdot \sqrt[3]{y^{-2}} = y^{\frac{2}{7}} \cdot y^{-\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{7}-\frac{2}{3}} = y^{-\frac{8}{21}}$;

в) $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^4 \cdot a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^5}} = \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}}$;

г) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^{-3}}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{(x^2)^4\cdot x^{-3}}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{x^8\cdot x^{-3}}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{x^5}} =$

$= \sqrt[20]{x^5} = x^{\frac{5}{20}} = x^{0,25}$

7. Выполнить действия:

а) $\left(1+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-a^{\frac{1}{2}}\right)=1^2-\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2=1-a$;

б) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2+2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^2=x+2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$;

в) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3=a+b$.

8. Решить неравенство:

а) $\frac{1}{2}a\ge a^3$; б) $x^{-3}>x^{-1}$; в) $a^{-\frac{3}{2}}>a^{\frac{1}{2}}$.

Р е ш е н и е. а) $a^3-\frac{1}{2}a\le 0$, $a\left(a^2-\frac{1}{2}\right)\le 0$,

$a\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\le 0$. Отсюда $a\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $0\le a\le\frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) $x^{-3}>x^{-1}$, $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}>0$, $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\cdot\frac{1}{x}>0$; $\frac{1-x^2}{x^2x}>0$, $\frac{x^2-1}{x^2x}<0$. Но $x^2>0$, поэтому имеем равносильное неравенство $(x+1)(x-1)x<0$, решая которое, найдем $x<-1$, $0<x<1$.

в) $a^{-\frac{3}{2}}>a^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}-a^{\frac{1}{2}}>0$, $\frac{1-a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}>0$, $\frac{1-a^2}{aa^{\frac{1}{2}}}>0$; $\frac{a^2-1}{aa^{\frac{1}{2}}}<0$; по определению, $a^{\frac{1}{2}}>0$. Имеем: $(a+1)(a-1)<0$. Откуда $0<a<1$.

3. Понятие степени с иррациональным показателем. Рассмотрим степень a^α, где a — любое положительное число, не равное 1, а α — любое иррациональное число. Здесь могут быть такие три случая:

а) $a>1$ и α — положительное иррациональное число, например $5^{\sqrt{2}}$.

Обозначим: α_1 — любое рациональное приближенное значение α, взятое с недостатком, и α_2 — любое приближенное рациональное значение числа α, взятое с избытком. Тогда степень a^α обозначает такое число, которое больше любой степени a^{α_1}, но меньше любой степени a^{α_2}. Например, $5^{\sqrt{2}}$ означает такое число, которое больше каждого из чисел ряда: $5^{1,4}$, $5^{1,41}$, $5^{1,414}$, $5^{1,4142}$, ... , в котором показатели — десятичные приближения $\sqrt{2}$, взятые с недостатком, но меньше каждого из чисел ряда: $5^{1,5}$, $5^{1,42}$, $5^{1,415}$, $5^{1,4143}$, ... , в котором показатели — десятичные приближения $\sqrt{2}$, взятые с избытком.

б) $0 < a < 1$ и α — положительное иррациональное число, например $0{,}5^{\sqrt{2}}$.

Тогда под степенью a^{α} понимают число, которое меньше любой степени a^{α_1}, но больше любой степени a^{α_2}. Так, $0{,}5^{\sqrt{2}}$ — число, меньше любого из чисел ряда $0{,}5^{1,4}$, $0{,}5^{1,41}$, $0{,}5^{1,414}$, $0{,}5^{1,4142}$, ... , но больше любого из чисел ряда $0{,}5^{1,5}$, $0{,}5^{1,42}$, $0{,}5^{1,415}$, $0{,}5^{1,4143}$, ...

Таким образом, если положительное иррациональное число α находится между двумя рациональными числами α_1 и α_2, то степень a^{α} находится между степенями a^{α_1} и a^{α_2} и тогда, когда $a > 1$, и тогда, когда $0 < a < 1$.

в) $a \geq 1$ и α — отрицательное иррациональное число, например $5^{-\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}}$.

Тогда выражению a^{α} придают тот самый смысл, который имеют степени с отрицательными рациональными показателями. Так, $5^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{5^{\sqrt{2}}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}}$. Можно доказать, что действия над степенями с иррациональными показателями выполняются по тем же правилам, что установлены для степеней с рациональными показателями: $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$; $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$; $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha}$; $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$, где a, b — положительные числа, α, β — иррациональные числа.

4. Степенная функция. Как мы уже убедились, для любого действительного числа p и положительного x определено число x^p. Если показатель степени p — постоянное число, а основание x — переменная, то $y = x^p$ является функцией аргумента x, т. е. $f(x) = x^p$.

Функцию $y = x^p$ [illegible] p [illegible] число, [illegible] x [illegible] степенной функцией.

Область определения и изменения степенной функции $y = x^p$, а также ее свойства зависят от того, каким числом является показатель p.

1. Пусть p — натуральное число.

Функция определена на всей числовой прямой; если $x = 0$, то $y = 0$, и если $x = 1$, то $y = 1$; при p нечетном ($p = 1, 3, 5, \dots$) для всех значений $x < 0$ и $x > 0$ знак функции совпадает со знаком аргумента; функция нечетная и возрастает на всей области определения.

Графиком является прямая, если $p = 1$, и кривые, если $p = 3, 5, 7, \dots$, симметричные относительно начала координат, расположены в I и III координатных четвертях (рис. 80).

Если p четное ($2, 4, 6, \dots$), $y > 0$, то для всех значений $x<0$ и $x > 0$, то функция четная. Если $x < 0$, функция убывает, если $x > 0$ — возрастает. Графики $y = x^p$ ($p = 2, 4, 6, \dots$) — кривые, симметричные относительно оси Oy, расположенные в I и II четвертях (рис. 81).

2. Пусть p — целое отрицательное число: $-1, -2, -3, \dots$. Тогда функция определена на всей числовой прямой, кроме точки $x = 0$ (нет числа, обратного нулю). График состоит из двух ветвей.

Если $x = 1$, то $y = 1$.

Если p — нечетное ($-1, -3, -5, \dots$), то для всех значений $x < 0$ и $x > 0$ знак функции совпадает со знаком аргумента. Функция нечетная, убывающая на всей области определения. Графиками $y = x^p$ ($p = -1, -3, -5, \dots$) являются кривые, симметричные относительно начала координат, расположенные в I и III четвертях (рис. 82).

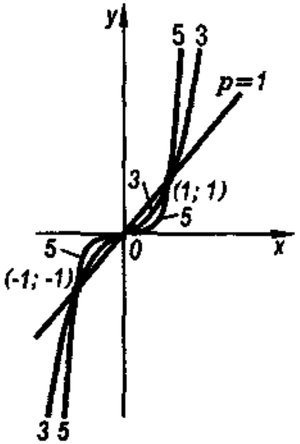

Рис. 80

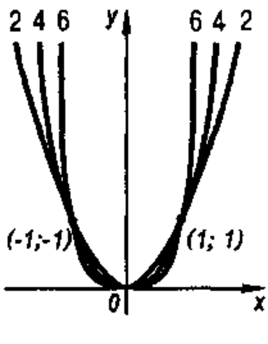

Рис. 81

Если p — четное (-2, -4, -6, ...), то значениям $x < 0$ и $x > 0$ соответствуют значения $y > 0$. Функция четная. Если $x < 0$, функция возрастает, если $x > 0$ — убывает. Графиком $y = x^p$ ($p = -2, -4, -6, \ldots$) являются кривые, симметричные относительно оси Oy, расположенные в I и II четвертях (рис. 83).

3. Пусть $p = \frac{1}{k}$, где $k = 2, 3, 4, \ldots$.

Функция определена для всех значений $x \geq 0$, при этом $y \geq 0$, $y = 1$, если $x = 1$.

Функция возрастает на всей области определения. Графики $y = x^{\frac{1}{k}}$ ($k = 2, 3, 4, \ldots$) расположены в I четверти (рис. 84).

Степенная функция $y = x^p$, если $p > 0$, определена и при $x = 0$, т. к. $0^p = 0$. Выражение 0^0 не имеет смысла.

Если p — целые, то степенная функция определена и для $x < 0$. Если p — четное, то функция четная, а если p нечетные — нечетная.

Если $p' = 0$, то, по определению степени с нулевым показателем, $y = 1$ при любом $x \neq 0$.

Графиком такой функции является прямая, параллельная оси Ox и удаленная от нее на расстояние, равное 1. Из этой прямой необходимо исключить точку, соответствующую абсциссе, равной 0 (рис. 85).

На практике часто приходится рассматривать функцию вида $y = Cx^p$, где C — постоянная. Это функции $y = kx$, $y = kx^2$, $y = kx^3$. Например: функция $s = 4{,}9t^2$ выражает зависимость между пройденным путем s и t — временем свободного падения.

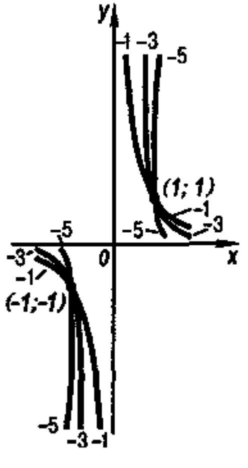

Рис. 82

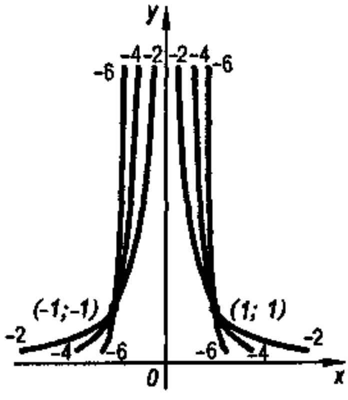

Рис. 83

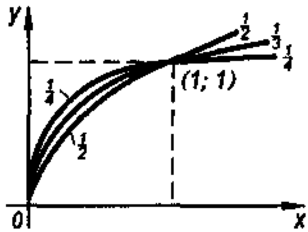

Рис. 84

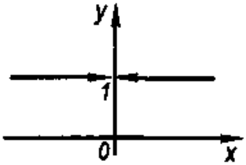

Рис. 85

Функция $S = \pi R^2$ выражает зависимость между площадью круга S и его радиусом R.

В физике мощность в цепи постоянного тока на участке с сопротивлением R определяется по формуле: $P = RI^2$, где I — сила тока.

Энергию магнитного поля определяют по формуле: $W_м = \frac{Li^2}{2}$, где L — индуктивность катушки; i — сила переменного тока.

Историческая справка

Понятие степени возникло в древности в связи с вычислением площади квадрата и объема куба (отсюда пошли названия «квадрат», «куб» для обозначения второй и третьей степеней). Сохранились таблицы квадратов и кубов, составленные в 1700 г. до н. э. в древнем Вавилоне.

Рене ДЕКАРТ
(1596—1650)

Для обозначения высших степеней позднее употреблялись выражения «биквадрат» или «квадрато-квадрат» для четвертой степени, «кубо-квадрат» для пятой и т. д.

Современные названия предложил голландский ученый **Симон Стевин** (1548—1620), который обозначал степень в виде числа, изображенного в круге. Он начал систематически использовать дробные показатели степени для обозначения корней. В наше время для извлечения корня используют два обозначения: знак радикала и дробные показатели (обозначение с помощью радикалов является данью традиции).

Приближенное значение квадратных корней из целых чисел умели вычислять еще в древнем Вавилоне около 4 тыс. лет тому назад. Вавилонские ученые пользовались таким методом: число a представляли в виде суммы $b^2 + c$, где c — малое по сравнению с b^2 число, и писали $\sqrt{a} = b + \frac{c}{2b}$.

Например: $\sqrt{40^2 + 200} = 40 + \frac{200}{2 \cdot 40} = 42\frac{1}{2}$. Такой способ приближенного вычисления квадратного корня называют *вавилонским методом.*

Иранский математик и астроном **ал-Каши** (умер в 1430 г.), который работал в Самарканде в обсерватории известного узбекского астронома и математика Улугбека (1394—1449), сформулировал правила $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ и $a^m : a^n = a^{m-n}$. Ал-Каши умел приводить к общему показателю произведения радикалов и словесно сформулировал правила $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m} \cdot \sqrt[mn]{b^n} = \sqrt[mn]{a^m b^n}$. Он также описал общий способ извлечения корней из целых чисел.

Название «радикал» происходит от латинских слов *radix* — корень и *radicalis* — коренной.

Начиная с XIII ст., европейские математики обозначали этим словом корень, или сокращенно *r*. В 1525 г. в книге чешского математика **Христофа Рудольфа** (1500—1545) «Быстрый и красивый счет с помощью ловких правил алгебры» появилось обозначение √ для знака квадратного корня; корень кубический обозначался там как ▼▼▼.

В 1626 г. голландский математик **Альбер Жирар** (1595—1633) ввел обозначение $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ ... . При этом над подкоренным выражением ставили горизонтальную черточку. Вместо современного $\sqrt{a+b}$ тогда писали $\sqrt{\overline{a+b}}$. Современное обозначение корня впервые появилось в книге французского философа, математика и физика **Рене Декарта** (1596—1650) «Геометрия», изданной в 1637 г.

Степени с отрицательными показателями ввел шотландский математик **Уильямс Уоллес** (1768—1843).

Дробные показатели степени и простейшие правила действий над сте-

Пьер ФЕРМА
(1601—1665)

пенями с дробными показателями описаны еще в XI ст. в работах французского математика **Никола Орема** (1323—1382), который применял также иррациональные показатели степени.

В своей работе «Алгоритм пропорций» (рукопись XI ст.) Орем вводит наряду с двойным, тройным, вообще n-кратными отношениями четвертные, полуторные и прочие дробно-рациональные отношения, которые соответствуют современным $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{1\frac{1}{2}}$ ... . Исходя, например, из того, что $8=\sqrt{64}$, $4=\sqrt[3]{64}$, Орем сделал вывод, что 8 находится в полуторном отношении к 4, т. е., на современном языке, $8=4^{\frac{3}{2}}$, что записывается так: $\frac{p\cdot 1}{1\cdot 2}$ (p — первая буква слова *proportio*).

Дробные отношения Орем называл иррациональными. Он сформулировал многочисленные правила операций с дробными отношениями типа

$$a^{\frac{m}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}};\ a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}};\ a^{\frac{1}{n}}:b^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}};$$

$$a^{\frac{1}{m}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(a^n b^m)^{\frac{1}{mn}};\ a^{\frac{1}{n}}:\frac{1}{b}^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{a^n}{b^m}\right)^{\frac{1}{mn}};$$

$$(a^m)^{\frac{p}{q}}=(a^{mp})^{\frac{1}{q}}=a^{\left(\frac{mp}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{\frac{q}{p}}\right)}.$$

Создание формального алгоритма дробных отношений и по сути обобщение действия возведения в степень с положительными дробными показателями было важным достижением средневековой алгебры. Хотя упомянутое произведение Орема было напечатано только в XI ст., оно получило распространение и в средние века.

Дальнейшую разработку алгоритма Орема осуществил французский математик **Никола Шюке** (1445—1500). Его рукописная работа «Наука о числах в трех частях» содержит правила вычислений с рациональными числами, иррациональными корнями, а также учение об уравнении.

Рассматривая уравнение, Шюке выходил из общего случая, сводя все уравнения, которые он исследовал, к четырем «канонам»:

$$ax^m=bx^{m+n};\ ax^m+bx^{m+n}=cx^{m+2n};$$

$$ax^m=bx^{m+n}+cx^{m+2n};\ ax^m+cx^{m+2n}=bx^{m+n}.$$

Работа Шюке осталась в рукописи и не получила распространения.

Пьер Ферма (1601—1665) в середине XVII ст. предложил общий метод решения иррациональных уравнений, сводя их к системе целых алгебраических уравнений.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Сформулировать определение степени с натуральным показателем.

2. Как обозначается степень с нулевым и целым отрицательным показателями?

3. Записать аналитическое (в виде формулы) определение степени с дробным показателем.

4. Что больше: $3^{\frac{1}{2}}$ или $9^{\frac{1}{4}}$?

5. Можно ли при выполнении действий над степенями с дробными показателями пользоваться правилами действий над степенями с целыми показателями?

6. Какое ограничение накладывают на основание a в выражении $a^{\frac{m}{n}}$, где n — четное число, и чем обусловленно такое ограничение?

7. Сформулировать свойства степени с дробным показателем.

8. Сформулировать определение степени с отрицательным рациональным показателем и записать его аналитически.

9. Можно ли степень с дробным показателем заменить на радикал?

10. Записать с помощью степеней с дробным показателем и вычислить с помощью микрокалькулятора (с тремя знаками после запятой): $\sqrt[3]{110}$; $\frac{1}{\sqrt[5]{15}}$; $\frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[8]{6}}$; $\frac{8}{\sqrt[5]{120}}$.

11. Записать основные свойства степени с рациональным показателем (умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня).

12. Как обозначается степень с иррациональным показателем?

13. Дать определение степенной функции с натуральным показателем.

14. Какие ограничения накладывают на аргумент x функции $y = x^n$, если $n \leq 0$?

15. Какие виды степенной функции вам известны? Записать их аналитически.

16. Какие функции называются нечетными? Построить эскизы графиков нескольких нечетных степенных функций с натуральным показателем.

17. Как расположен на координатной плоскости график функции $y = x^n$, если n — нечетное; n — четное?

18. Назвать общие свойства степенной функции.

19. Какие свойства имеет степенная функция $y = x^{-1}$? Назвать по эскизу ее графика.

20. Назвать свойства степенной функции $y = x^{-2}$ по эскизу ее графика.

21. Начертить эскизы графиков функций $y = x^{\frac{1}{2}}$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$. Пользуясь графиками, сформулировать свойства этих функций.

22. Систематизировать свойства степенной функции по показателю n: а) n — натуральное число (1, 2, 3, ...); б) n — целое отрицательное число (−1, −2, −3, ...); в) $n = \frac{1}{k}$, где $k = 2, 3, 4, \ldots$.

23. Чем отличаются графики функций $y = x^2$ и $y = 3x^3$?

24. Сравнить свойства функций: а) $y = x^3$ и $y = x^5$; б) $y = x^4$ и $y = x^6$; в) $y = x^{-2}$ и $y = x^3$.

25. Дано функции $f(x) = x^5$ и $\varphi(x) = x^6$. Не выполняя вычислений, сравнить с нулем: а) $f(25) - f(10)$; б) $f(-20) - f(-15)$; в) $f(0) \cdot f(50)$; г) $\varphi(11) - \varphi(7)$; д) $\varphi(-5) \cdot \varphi(-9)$; е) $\varphi(15) \cdot \varphi(0)$.

26. Найдется ли такое натуральное значение p, при котором график функции $y = x^p$ проходит через точку: а) $A(1;\ 4)$; б) $B(\sqrt{3};\ 81)$; в) $C(-5;\ 6{,}25)$; г) $D(-7;\ 343)$?

27. При каких значениях x существует функция $y = x^{\frac{m}{n}}$, где m и n — целые числа и n — четное число?

28. Построить график функции $y = x^{-\frac{3}{2}}$ и описать ее свойства.

29. Построить график функции $y = x^{-\frac{1}{3}} - 1$.

30. Относится ли функция $y = \sqrt[5]{x^3}$ к нечетным? Обоснуйте свой ответ.

УПРАЖНЕНИЯ

Выполнить действия:

145. 1) $a^2a^6a^8$; 2) $x^nx^{2n}x^{4n}$; 3) $b^{13} : b^{10}$; 4) $c^{6n} : c^{5n}$; 5) $a^n : a^{n-2}$; 6) $b^{n+1} : b^{n-1}$.

146. 1) $(2x^3y^2z)^4$; 2) $(-3a^2b^4c^5)^3$; 3) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$; 4) $\left(\frac{a}{2b}\right)^4$.

147. 1) $(a^4)^2$; 2) $\left(-\frac{4xy^2}{5z^3}\right)^3$; 3) $(a^{n-1})^4$; 4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{2n-1}$.

148. 1) $(3a^3b^4)^0$; 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$; 3) $\frac{3^{-1}ab^{-2}}{2^{-2}x}$; 4) $2^{10}:2^{15}$.

149. 1) $a^{-m}:a^0$; 2) $(10^4)^{-3}$; 3) $(2a^2b^{-3})^4$; 4) $2x^{-4}:x^{-7}$.

Б

150. 1) $(a^{12}a^3:a^4a^7)^3$; 2) $(-ab^2c^3)^4$; 3) $(p2^{n-1})^m$;

4) $\frac{(64m^2n^4)^5}{(16mn^3)^5}$; 5) $(7^{-3}\cdot 343+0{,}723^0)^3$; 6) $3a^7a^{-5}+2{,}51^0a^{-7}a^5$.

151. Упростить выражение: 1) $\left(\frac{2}{3}a^{-2}(b^3)^{-3}\right)^4$; 2) $3x^{n-1}\cdot 5x^{n+1}$;

3) $\frac{6a^5x^{-7}y^{-8}}{4^{-1}a^{-3}b^{-4}}$; 4) $(5a^{-1}+b^{-2})\cdot(5a^{-1}-b^{-2})$.

152. Возвести в квадрат $\left(2a^{3x}+\frac{x}{4a^{2x-1}}\right)^2$.

В

153. Выполнить действия:

1) $\left(\left(-\frac{a^2b}{cd^3}\right)^3\cdot\left(\frac{ac^4}{b^2d^3}\right)^2\right):\left(\left(\frac{a^2b^2}{cd^3}\right)^4\cdot\left(-\frac{c^2}{b^3d}\right)^3\right)$;

2) $\left(\frac{a+b}{c-x}\right)^m\cdot\left(\frac{c+x}{a+b}\right)^m\cdot\left(\frac{c-x}{a-b}\right)^m$.

154. С помощью микрокалькулятора вычислить значение выражения $25x^2(y^2-z^2)$, если $x\approx 2{,}24$; $y\approx 27{,}3$; $z\approx 12{,}8$.

155. Записать дробь $\frac{2b^2+a}{a^2b^4}$ с помощью степени с отрицательным показателем.

А

156. Представить выражение в виде степени с рациональным показателем: 1) $x^3x^{0,2}x^{0,8}$; 2) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{4}}$; 3) $b^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{3}{4}}$;

4) $(a^{-\frac{2}{5}})^{10}$; 5) $\left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{1\frac{1}{5}}$; 6) $\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$.

157. Упростить: 1) $(x^{\frac{2}{3}})^{0,5}\cdot x^{-\frac{2}{5}}$; 2) $p^{-1}q^{\frac{5}{4}}p^{-\frac{2}{7}}q^{\frac{1}{14}}$; 3) $(b^{-6})^{-\frac{1}{3}}$.

158. Вычислить: 1) $3^3 \cdot 3^{-\frac{3}{8}}$; 2) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{1}{3}}$.

159. Выполнить действия: 1) $a^{-\frac{7}{15}} : a^{\frac{11}{20}}$; 2) $\frac{2a^{-\frac{7}{8}}}{a^{1,25}b^{-\frac{2}{3}}}$.

160. Упростить выражение: 1) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;
2) $(a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{2}{3}})a^{0,7} \cdot x^{0,8}$.

161. Вычислить: 1) $9^{-\frac{4}{3}} \cdot 27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$; 2) $64^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{8}{3}}$;
3) $(\frac{1}{27} \cdot 125^{-1})^{-\frac{1}{3}}$; 4) $((\sqrt[3]{a})^{\sqrt{3}})^{-2\sqrt{3}}$.

162. Представить в виде куба: y^9; y^{-33}; y^5; y; $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{-1,5}$; $y^{-\frac{1}{4}}$; $y^{0,1}$; $y^{-\frac{5}{6}}$.

163. Сократить дробь: 1) $\frac{2 - 2^{\frac{1}{2}}}{5 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 3}{x - 9}$; 3) $\frac{a}{a - a^{\frac{1}{2}}}$;
4) $\frac{(ab)^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}$.

164. Представить выражение в виде суммы:
1) $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})$; 2) $(2 - y^{1,5})(2 + y^{1,5})$.

165. Упростить выражение: 1) $(b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}) : (b^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}})$;
2) $(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)$.

166. Пользуясь тождеством $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, разложить на множители выражение: 1) $a^2 - 3$; 2) $b^{\frac{2}{3}} - 25$;
3) $(x^{\frac{1}{3}})^2 - 4$; 4) $a - b^{\frac{1}{2}}$, где $a \geq 0$.

167. Упростить выражение: 1) $\left(\frac{4}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\frac{a^{\frac{3}{4}}}{8}\right)^{\frac{1}{9}}$;

2) $(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})\cdot(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})\cdot(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$.

168. Доказать, что при любом $a>0$ выполняется равенство: 1) $\frac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a}}}=1$; 2) $\frac{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[6]{a^5\sqrt{a}}}=1$.

169. Представить в виде суммы:

1) $((x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}))^2$; 2) $((x^{-\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}}))^2$.

170. Разложить на множители:

1) $a+a^{\frac{1}{2}}$; 2) $125-b$, где $b\ge 0$; 3) $18^{\frac{2}{3}}-6^{\frac{4}{3}}$;

4) $(2a)^{\frac{1}{2}}-(5a)^{\frac{1}{2}}$.

171. Найти значение выражения:

1) $\frac{a^{\frac{1}{2}}-9a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}-3a^{\frac{1}{6}}}$, если $a=64$; 2) $\frac{8}{y^{\frac{1}{4}}-2}+\frac{y-8y^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{2}}-4}$, если $y=25$.

172. Вычислить:

$$0{,}027^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0{,}75}-3^{-1}+5{,}5^0.$$

173. Упростить выражение, выполнив действия:

1) $\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}-\frac{x+1}{x^2-4x+3}$;

2) $\frac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\frac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}$;

3) $\left(\left(\frac{2^{\frac{3}{2}}+27^{\frac{3}{5}}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2-2}\right)\cdot 3^{-2}\right)^5$;

4) $\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{x^{0{,}5}+1}{x^{1{,}5}-1}+\frac{2}{x^{-0{,}5}}$; 5) $\frac{(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}})^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt[5]{a^4})^3}\cdot\frac{(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}})^4}{(a\sqrt[4]{b})^6}$;

6) $\frac{1+2a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{2}}}{1-a+4a^{\frac{3}{4}}-4a^{\frac{1}{2}}}+\frac{a^{\frac{1}{4}}-2}{(a^{\frac{1}{4}}-1)^2}$.

Глава 4

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Некоторые виды ... функций, которые чаще всего используются, прежде всего показательные, открывают доступ ко многим исследованиям.

Леонард Эйлер

§ 19. Понятие показательной функции

Примеры зависимостей, которые приводят к понятию показательной функции.

Пример 1. Во время радиоактивного распада масса m вещества изменяется с течением времени t по закону: $m = m_0 a^{kt}$, где m — масса вещества через t лет после начала распада; m_0 — начальная масса вещества; k и a — постоянные величины для данного вещества.

Пример 2. Количество y жителей города с миллионным населением через x лет вычисляется по формуле $y = 1\,000\,000 \cdot 1{,}02^x$ (при условии, что каждый год наблюдается прирост населения на 2 %).

Пример 3. Температура T 100 г песка, нагретого до 100 °C, изменяется при 0 °C в зависимости от времени t по формуле $T = 100 \cdot 0{,}8^t$.

Пример 4. Во время вытекания жидкости из цилиндрического сосуда через тонкую трубку, размещенную в основе цилиндра, высота h уровня жидкости с течением времени t изменяется по формуле: $h = h_0 a^t$, где h_0 — начальный уровень жидкости; a — постоянная, которая зависит от диаметра трубки.

В каждом из приведенных примеров формула задает функцию, для вычисления значения которой постоянный множитель приходится умножать на степень постоянной с переменным показателем, которая имеет вполне определенное положительное значение. Простейшим случаем таких зависимостей является функция вида $y = a^x$, которую называют **показательной.**

Определение и график показательной функции. Вы уже знаете, что когда a — положительное, то для любого числа x степень a^x имеет вполне определенное положительное значение. Поэтому a^x является функцией переменной x, которая определена на всей числовой оси, т. е. на множестве $\boldsymbol{R}$.

Функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется показательной (с основанием a).

Так, функции $y = 3^x$, $y = 0{,}72^x$, $y = \left(\frac{3}{13}\right)^x$ — показательные. Выясним сущность ограничений $a > 0$ и $a \neq 1$.

1) Требование $a > 0$. Если $a = 0$ и $x \leq 0$, то выражение a^x не имеет смысла. Например, выражения 0^{-1}, $0^{-\frac{1}{8}}$, 0^0 лишены смысла.

Если $a < 0$ и x — несократимая дробь, знаменатель которой четный, то выражение a^x не имеет смысла. Например, степень $(-2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^3} = \sqrt[4]{-8}$ не может быть выражена действительным числом.

2) Требование $a \neq 1$. Если $a = 1$, то каждое значение 1^x равно 1, т. е. функция сводится к постоянной.

Этот случай ничего нового не добавляет к определению показательной функции, а поэтому его исключают.

Начнем изучение показательных функций с функции $y = 2^x$. Составим таблицу некоторых значений аргумента и соответствующих им значений этой функции (табл. 4).

Построим на координатной плоскости точки с координатами, взятыми из этой таблицы, и соединим эти точки плавной линией (рис. 86). Получим график функции.

Рассмотрим теперь функцию 3^x. Составим аналогичную таблицу (табл. 5).

Построим в той же системе координат точки с координатами, взятыми из таблицы, и соединим их плавными линиями (рис. 87). Из этого рисунка видно, что обе функции возрастают, но функция $y = 3x$ возрастает быстрее (ее график возрастает «круче»).

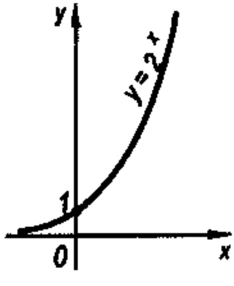

Рис. 86

Рассмотрим функцию $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Составим таблицу (табл. 6) и построим график (рис. 88).

Что является общим у графиков функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

1) Областью определения обеих функций является множество действительных чисел.

2) Обе функции положительны при

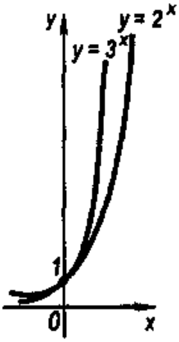

Рис. 87

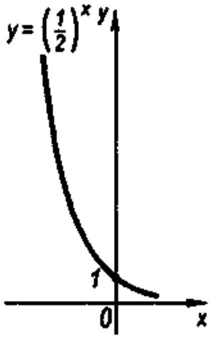

Рис. 88

любом значении аргумента (графики расположены в верхней полуплоскости).

3) Если $x = 0$, то обе функции приобретают значение, равное 1.

Эти три свойства являются общими для любых показательных функций $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Построим теперь графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ в одной и той же системе координат (рис. 89) и сравним их свойства. Из этого рисунка видно, что графики расположены симметрично относительно оси ординат. Функция $y = 2^x$ — возрастающая, а функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — убывающая.

Таблица 4

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Таблица 5

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

Таблица 6

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

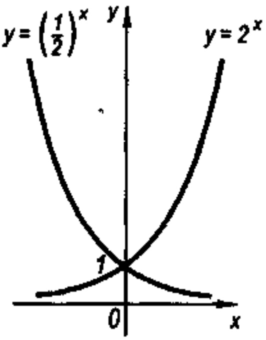

Рис. 89

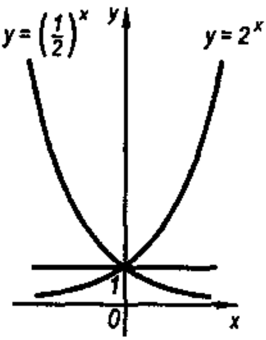

Рис. 90

Проведем через точку пересечения графиков функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ прямую, параллельную оси абсцисс (рис. 90) и сравним части кривых, лежащих под этой прямой и над ней. Какие части кривых отвечают значениям функций, меньшим 1? большим 1? Если $x < 0$ (левая полуплоскость), то функция $y = 2^x$ принимает значения, меньшие 1, а если $x > 0$ (правая полуплоскость) — значения, большие 1.

Функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ при $x < 0$ принимает значения, большие 1, а при $x > 0$ — меньшие 1.

Для большей наглядности представим свойства функции $y = a^x$, если $a > 1$ и $0 < a < 1$, в виде таблицы (табл. 7).

Таблица 7

$y = a^x$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
1. Возрастает 2. Если $x < 0$, принимает значения, меньшие 1 3. Если $x > 0$, принимает значения, большие 1	1. Убывает 2. Если $x < 0$, принимает значения, большие 1 3. Если $x > 0$, принимает значения, меньшие 1

Для дальнейшего изучения свойств показательной функции важно знать следующие свойства степени (их представляем без доказательства).

а) При возведении неправильной дроби в степень с положительным показателем получаем число, большее 1, а при возведении неправильной дроби в степень с отрицательным показателем, — число, меньшее 1, например:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27} = 4\frac{17}{27}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1{,}50} \approx 1{,}15;$$

$$\left(\frac{9}{7}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{9}{7}\right)^2}=\frac{1}{\frac{81}{49}}=\frac{49}{81};$$

$$\left(\frac{10}{7}\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{10}{7}\right)^{\frac{1}{3}}}\approx\frac{1}{\sqrt[3]{1,43}}\approx\frac{1}{1,13}\approx 0,885.$$

б) При возведении правильной дроби в степень с положительным показателем получаем число, меньшее 1, а при возведении правильной дроби в степень с отрицательным показателем, — число, большее 1, например:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125};\ \left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{1}{2}}\approx\sqrt{0,70}\approx 0,84;$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{1}{\frac{9}{25}}=\frac{25}{9}=2\frac{7}{9};$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{0,6^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{0,36}}\approx\frac{1}{0,71}\approx 1,4$$

Свойства функции $y = a^x$, если $a > 1$ и $0 < a < 1$, существенно отличаются между собой. Поэтому мы сначала рассмотрим общие свойства показательной функции, а потом отдельно — ее свойства, если $a > 1$ и если $0 < a < 1$.

Общие свойства показательной функции.

1. Областью определения показательной функции $y = a^x$ является множество всех действительных чисел. Так, если $a > 0$, $a \neq 1$, то выражение a^x определено для любого x, $-\infty < x < +\infty$.

2. Показательная функция $y = a^x$ положительна при любом значении аргумента, т. е. $a^x > 0$.

Нетрудно убедиться в том, что показательная функция не может ни равняться нулю, ни быть отрицательной, т. е. областью ее значений является множество всех положительных чисел $(0; +\infty)$. Так, a^x может равняться нулю только при $a = 0$, но мы условились, что $a \neq 0$. Функция $y = a^x$ может быть отрицательной только при $a < 0$ (и то не для всех значений x), но мы условились рассматривать показательную функцию только при $a > 0$. А при возведении положительного числа a в степень x с любым действительным показателем всегда будем иметь положительное число.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим все возможные случаи.

а) Пусть $x = n$, где n — натуральное число. Тогда $a^x = a^n = aa \ldots a > 0$ как произведение положительных чисел.

б) Если x — дробное положительное число, т. е. $x = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Но $a^m > 0$ (условие существования корня n-й степени).

в) Пусть x — положительное иррациональное число. Обозначим α_1 и α_2 — приближенные рациональные (положительные) значения с недостатком и с избытком. Тогда значение a^x находится между двумя положительными числами a^{α_1} и a^{α_2} и является положительным числом.

г) Наконец, если x — некоторое отрицательное число, например $x = -p$, то $a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. Но раньше было показано, что для любых положительных p $a^p > 0$ и, таким образом, $\frac{1}{a^p} > 0$. Отсюда следует, что сформулированное свойство справедливо для любого x.

Таким образом, график показательной функции всегда лежит над осью абсцисс (ординаты всех точек графика положительны) и не пересекает ее ($y \neq 0$).

3. Если $x = 0$, то показательная функция $a^x = 1$.

Это следует из того, что любое число, кроме нуля, в нулевой степени равно 1, а мы условились рассматривать показательную функцию, если $a \neq 0$.

Из этого свойства делаем вывод, что график функции $y = a^x$ всегда проходит через точку с координатами $x = 0$; $y = 1$, т. е. пересекает ось ординат на расстоянии 1 от начала координат.

Рассмотрим свойства показательной функции $y = a^x$, если $a > 1$ и $0 < a < 1$.

Кроме рассмотренных трех общих свойств показательной функции докажем ее свойства для случаев, когда основание больше и, соответственно, меньше 1.

1) Пусть $a > 1$.

Если $a > 1$, то функция a^x при возрастании x монотонно возрастает. Самостоятельно докажите, что когда $a > 1$, то для любого $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $a^{x_2} > a^{x_1}$, т. е. $a^{x_2} - a^{x_1} > 0$.

Если $a > 1$, то при неограниченном возрастании показателя x функция $y = a^x$ неограниченно возрастает, а при неограниченном убывании показателя x функция принимает значения, как угодно близкие к нулю.

Если $a > 1$, то показательная функция $y = a^x$ больше 1 для всех положительных значений x и меньше 1 для всех отрицательных значений x, т. е. $a^x > 1$ для $x > 0$ и $a^x < 1$ для $x < 0$.

Рассмотрим возможные случаи для значений x.

а) Пусть $x = n$ — натуральное число. Тогда $a^n > 1$, т. к.

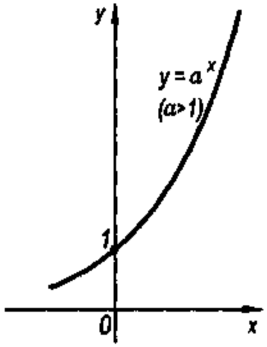

Рис. 91

произведение чисел, больших 1, является числом, большим 1.

б) Если $x = \frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые натуральные числа, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} > 1$, т. к. корень любой степени из числа, большего 1 ($a^m > 1$), является числом, также большим 1.

в) Если x — положительное иррациональное число и α_1 —приближенное рациональное значение x с недостатком, то $a^{\alpha_1} > 1$, поэтому и $a^x > 1$.

г) Если x — любое отрицательное число, например $x = -p$, то $a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, но из предыдущего следует, что $a^p > 1$. Поэтому, $\frac{1}{a^p} < 1$, т. е. $a^x < 1$.

Таким образом, мы доказали, что когда $a > 1$, функция $a^x < 1$, если $x < 0$ и $a^x > 1$, если $x > 0$ (рис. 91). Это свойство дает возможность установить, в каких частях координатной плоскости будет расположен график функции $y = a^x$, если $a > 1$ (на рис. 92 эти части заштрихованы).

Пусть $0 < a < 1$.

1. Если $0 < a < 1$, функция a^x при возрастании x монотонно убывает (рис. 93).

2. Если $0 < a < 1$, функция $y = a^x$ при неограниченном возрастании показателя x принимает значения как угодно близкие к нулю, а при неограниченном убывании показателя x функция неограниченно возрастает.

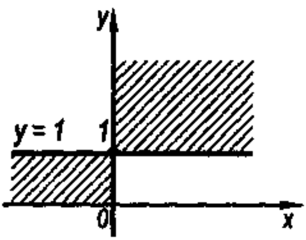

Рис. 92

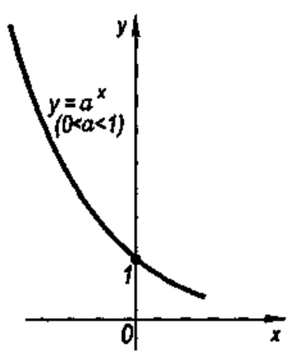

Рис. 93

3. Если $0 < a < 1$, то показательная функция a^x больше 1 для всех отрицательных значений x и меньше 1 для всех положительных значений x, т. е. $a^x > 1$ для $x < 0$ и $a^x < 1$ для $x > 0$. Справедливость этих утверждений следует из того, что значения показательной функции с основанием, меньшим 1, обратны соответствующим значениям показательной функции с основанием, большим 1:

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}.$$

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$.

Замечание. Для применения показательной функции очень важными являются такие ее свойства (представим их без доказательства).

Если $a > 0$, $a \neq 1$ и $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$, т. е. если степени одного и того же положительного, отличного от единицы, основания равны, то равны и показатели этих степеней.

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то каково бы ни было положительное число N, существует, и причем единственное, такое значение x, что $a^x = N$.

Другими словами, при этих условиях имеет решение, и причем единственное, уравнение $a^x = N$.

Свойства графика показательной функции. График показательной функции называется **экспонентой.**

Мы рассмотрели свойства графика показательной функции $y = a^x$, если $a > 1$, на примере функции $y = 2^x$.

Составим таблицу значений показательной функции для некоторых значений x ($x = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$) и построим соответствующий график (см. рис. 86).

Он имеет следующие свойства.

1) График расположен в верхней полуплоскости, т. е. там, где ординаты положительны.

2) Любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает график и при этом только в одной точке.

3) Кривая проходит через точку (0; 1), т. е. при $x = 0$ функция численно равна 1.

4) Из двух точек графика выше расположена та, которая лежит правее, т. е. по мере продвижения слева направо график устремляется вверх.

5) На графике есть точки, которые лежат выше любой пря-

мой, параллельной оси Ox. На графике есть точки, которые лежат ниже любой прямой, проведенной в верхней полуплоскости параллельно оси Ox.

Своей левой частью график, если двигаться за ним справа налево, все ближе подходит к оси Ox, но не касается ее.

6) Любая прямая, параллельная оси Ox и находящаяся в верхней полуплоскости, пересекает график, и причем в одной точке.

Самостоятельно проведите аналогичные рассуждения для функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Какие из рассмотренных выше свойств функции $y = a^x$, когда $a > 1$ и $0 < a < 1$, можно проиллюстрировать с помощью этих графиков?

Примеры применения свойств показательной функции.

1. Что можно сказать о числах m и n, если $5^m < 5^n$?

Рассуждаем так: поскольку основание степени больше 1, то показательная функция $y = 5^x$ с возрастанием аргумента возрастает. Следовательно, данное неравенство справедливо при $m < n$.

2. Что можно сказать о числах p и q, если $(0{,}3)^p < (0{,}3)^q$?

Здесь основание степени меньше 1, а поэтому с возрастанием аргумента показательная функция $0{,}3^x$ убывает. Неравенство $(0{,}3)^p < (0{,}3)^q$ справедливо при $p > q$.

3. Что можно сказать о положительном основании a, если $a^7 > a^{10}$?

Из данного неравенства следует, что значения показательной функции a^x с возрастанием аргумента убывают. Это возможно, если $a < 1$.

4. Какой вывод можно сделать относительно положительного основания a, если $a^{-7} > a^{-3}$?

Здесь функция $y = a^x$ с возрастанием аргумента убывает, следовательно, $a < 1$.

5. Какой вывод можно сделать о положительном основании a, если $a^{-3} < a^{-1,5}$?

Поскольку с увеличением показателя степень увеличивается, то основание степени $a > 1$.

6. Что можно сказать о числе m, если $5^m < 4$?

Здесь основание $a > 1$. Следовательно, функция $y = 5^x$ монотонно возрастает, причем $5^m < 4 < 5$, $m < 1$.

7. На основании свойств показательной функции заменить знак $\vee$ в каждом из следующих случаев на знак $>$, $<$, $=$.

а) $2{,}17^{-0,875} \vee 1$. Функция $y = 2{,}17^{-0,875}$ при отрицательных значениях аргумента ($x = -0{,}875$) принимает значения, меньшие 1. Следовательно, $2{,}17^{-0,875} < 1$.

б) $\left(\frac{16}{15}\right)^{0,123} \vee 1$. Функция $y = \left(\frac{16}{15}\right)^{0,123}$ возрастает, и если $x > 0$, то $\left(\frac{16}{15}\right)^{x} > 1$, поэтому $\left(\frac{16}{15}\right)^{0,123} > 1$.

в) $0{,}017^{-0,23} \vee 1$. Функция $y = 0{,}017^x$ для $x < 0$ принимает значения, большие 1. Следовательно, $0{,}017^{-0,23} > 1$.

г) $0{,}91^{0,43} \vee 3{,}6^{5,34}$; $0{,}91^{0,43} < 1$, а $3{,}6^{5,34} > 1$, поэтому $0{,}91^{0,43} < 3{,}6^{5,34}$.

8. Указать, какие из показательных функций:

$$y = 3^x;\ y = (\sqrt[3]{10})^x;\ y = \left(\frac{5}{7}\right)^x;\ y = \left(\frac{7}{5}\right)^x;\ y = 0{,}018^x$$

возрастают. Здесь следует принять во внимание, что функция $y = a^x$ возрастает, если $a > 1$.

9. Какие из функций: $y = (\sqrt{3})^x$; $y = \left(\frac{9}{5}\right)^x$; $y = \left(\frac{3}{19}\right)^x$; $y = 0{,}24^x$ убывают?

Принимая во внимание свойства функции $y = a^x$ для $a < 1$, приходим к выводу, что это функции $y = \left(\frac{3}{19}\right)^x$ и $y = 0{,}24^x$.

10. Дано несколько возрастающих функций: $y = 2^x$; $y = 1{,}4^x$; $y = 4{,}1^x$; $y = 7^{\frac{1}{2}x}$; $y = 5^x$; $y = 1{,}11^x$. Записать их в порядке уменьшения скорости возрастания для $x > 0$.

Имеем: $y = 5^x$; $y = 4{,}1^x$; $y = 7^{\frac{1}{2}x}$; $y = 2^x$; $y = 1{,}4^x$; $y = 1{,}11^x$.

Использование показательной функции при изучении явлений окружающей среды. Многие процессы в природе и технике математически выражаются при помощи показательной функции.

Задача о радиоактивном распаде. Пусть T — интервал времени, в течение которого количество данного радиоактивного вещества уменьшится вдвое вследствие распада. T называется периодом полураспада вещества (для разных веществ T имеет разные значения). Например, $T = 4{,}56$ млрд лет для урана-238; $T = 1590$ лет для радия-226; $T = 3{,}81$ дней для радона-222.

Обозначим отношение любого интервала времени t к периоду полураспада данного вещества через x: $x = \frac{t}{T}$ (t и T измеряют в одних и тех же единицах). Тогда x является мерой количества периодов, которые прошли при условии, что за единицу времени берется период полураспада. Отношение массы m данного вещества после прохождения этого времени к начальной массе M обозначим через y: $y = \frac{m}{M}$.

Можно утверждать, что y является частью вещества, которое остается вследствие распада после x периодов полураспада.

Установлено, что y является показательной функцией от x такого вида: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Когда в этой формуле x изменяется в арифметической прогрессии ($x = 2, 3, 4, 5, \ldots$), то y уменьшается в геометрической прогрессии $\left(y = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$.

Более общей формулой, характеризующей радиоактивный распад, является $m = m_0 a^t$, где m — масса вещества, которое распалось; m_0 — масса вещества в начальный момент; t — время; a — постоянная для данного вещества.

Задача об изменении атмосферного давления. Атмосферное давление изменяется в зависимости от высоты h над уровнем моря по закону $p = p_0 a^h$, где p_0 — атмосферное давление на уровне моря; a — некоторая постоянная.

Задача о размножении бактерий. Размножение бактерий в определенной среде происходит так, что их количество N изменяется во времени по закону $N = N_0 a^{kt}$, где N_0 — начальное количество бактерий при $t = 0$; a и k — некоторые постоянные.

Задача о вакуумировании. Во время вакуумирования конечное давление связано с начальным давлением соотношением

$$p_2 = \left(\frac{R}{R+Q}\right)^{\frac{nt}{3}} p_1,$$

где p_2 — конечное давление, мм рт. ст.; p_1 — начальное давление, мм рт. ст.; R — объем, подлежащий откачиванию, см^3; Q — объем газа, который откачивается насосом за один оборот, см^3; n — число оборотов насоса, об/мин; t — время вакуумирования.

Задача о приращении древесины. Дерево растет так, что количество древесины увеличивается со временем по закону $M = M_0 a^{kt}$, где M — количество древесины в данный момент, м^3; M_0 — начальное количество древесины; t — время (в годах), которое отсчитывается с момента, когда объем древесины был M_0; k — некоторая постоянная.

Вычислим, например, за сколько лет объем древесины увеличится в a раз.

Решение. Если в некоторый момент времени t $\frac{M}{M_0} = a$, то разделив обе части равенства $M = M_0 a^{kt}$ на M_0, получим $\frac{M}{M_0} = a^{kt}$, т. е. $a^{kt} = a = a^1$. Тогда $kt = 1$ и $t = \frac{1}{k}$.

Таким образом, объем древесины увеличится в a раз за $\frac{1}{k}$ лет.

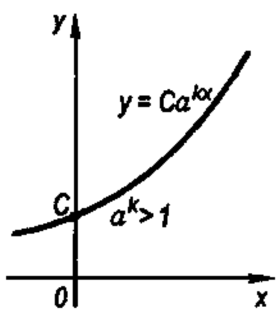

Рис. 94

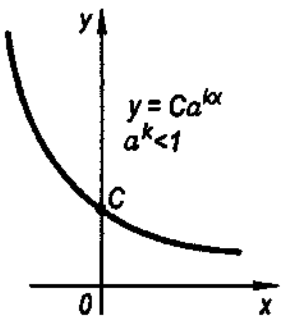

Рис. 95

В практическом применении показательная функция наиболее часто встречается в виде $y = Ca^{kx}$. Покажем, что функцию $y = a^{kx + b}$ можно преобразовать к виду $y = Ca^{kx}$.

Действительно $a^{kx+b} = a^{kx} \cdot a^b$. Обозначая $a^b = C$, получим: $a^{kx}a^b = Ca^{kx}$.

Примеры.

1. Функцию $y = 3^{5x+3}$ можно представить в виде $y = 3^{5x} \cdot 3^3$, или $y = 27 \cdot 3^{5x}$.

2. Функцию $y = 25^{4x+\frac{1}{2}}$ можно представить в виде $y = 25^{4x} \cdot 25^{\frac{1}{2}}$, или $y = 5 \cdot 25^{4x}$.

Рассмотрим некоторые упражнения с использованием функции $y = Ca^{kx}$.

1) В какой точке пересекает ось ординат график функции $y = Ca^{kx}$?

Ответ. $(0; C)$.

2) Каково значение коэффициента C функции $y = Ca^{kx}$, если ее график пересекает ось ординат в точке $(0; -3)$?

Ответ. $C = -3$.

3) Какие значения (отрицательные или положительные) принимает функция: а) $y = -5a^{kx}$; б) $y = 0,7a^{kx}$?

Ответ. а) Отрицательные; б) положительные.

4) При каких значениях C график функции $y = Ca^{kx}$ находится над осью абсцисс?

Ответ. Если $C > 0$.

5) При каких значениях C график функции $y = Ca^{kx}$ находится под осью абсцисс?

Ответ. Если $C < 0$.

6) Пройдут ли через одну точку графики функций $y_1 = Ca^{k_1x}$, $y_2 = Ca^{k_2x}$, $y_3 = Ca^{k_3x}$?

Ответ. Да, все они пройдут через точку $(0; C)$.

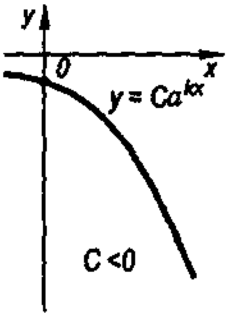

Рис. 96

Рассмотрим еще некоторые свойства функции $y = Ca^{kx}$.

Пусть $y = Ca^{kx}$, где $C > 0$. Если $a^k > 1$, то график имеет вид, изображенный на рисунке 94. Это возможно в двух случаях:

1) $a > 1$, $k > 0$; 2) $0 < a < 1$, $k < 0$.

Рассмотрим функцию $y = Ca^{kx}$ $(C > 0)$, график которой изображен на рисунке 95. Это возможно, если $a^k < 1$, т. е. в двух случаях: или $0 < a < 1$, $k > 0$, или $a > 1$, $k < 0$.

Если $C < 0$, график функции $y = Ca^{kx}$ имеет вид, изображенный на рисунке 96.

Основные показательные тождества. Для любых действительных значений x и y справедливы равенства:

$$a^x a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad (ab)^x = a^x b^x;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \qquad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Эти формулы называют основными свойствами степеней. Они означают, что для функции a^x, которая определена на всей числовой прямой, остаются справедливыми свойства функции a^x, которая сначала была определена только для рациональных x.

Напомним, что рациональные числа вместе с иррациональными образуют множество действительных чисел (числовую прямую).

1. Дать определение показательной функции $y = a^x$. Почему в определении сказано, что $a > 0$ и $a \neq 1$?

2. Назвать область определения показательной функции a^x.

3. Какие из функций $y = x^{1,3}$; $y = 2{,}75^x$; $y = \sqrt[3]{x}$; $y = x^{-3}$; $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ являются показательными?

4. Какие свойства имеет функция $y = a^x$, если $a > 1$? Для ответа построить эскиз графика этой функции.

5. Какие свойства имеет функция $y = a^x$, если $0 < a < 1$? Объяснить, используя эскиз соответствующего графика.

6. Какова особенность размещения графиков функций $y = 10^x$ и $y = 0{,}1^x$?

7. При каких условиях $3^{x_1} > 3^{x_2}$ и $0{,}7^{x_1} > 0{,}7^{x_2}$?

8. Известно, что $a^{\alpha} > a^{\beta}$. Что больше: α или β, если $0 < a < 1$?

9. Известно, что $a^{\alpha} < a^{\beta}$. Что больше: α или β, если $a > 1$?

10. Справедливо ли неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$ для $x_1 > x_2$?

11. Какие из показательных функций $y = \left(\frac{7}{11}\right)^x$; $y = 3^x$; $y = \left(\frac{5}{6}\right)^x$; $y = 0{,}027^x$ возрастают?

12. Какие из функций $y = 0{,}26^x$; $y = (\sqrt{3})^x$; $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$; $y = \left(\frac{4}{19}\right)^x$ убывают?

13. Сравнить показатели k и m, если справедливо неравенство:

а) $\pi^k > \pi^m$; б) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^k < \left(\frac{\pi}{3}\right)^m$;

в) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^k > (\sqrt{3} - \sqrt{2})^m$; г) $(\sqrt{7} - 1)^k < (\sqrt{7} - 1)^m$.

14. Можно ли, зная график функции $y = a^x$, построить график функции $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$? Как это сделать?

15. Сравнить число a с единицей в каждом из неравенств:

а) $a^{1{,}27} > a^{0{,}419}$; б) $a^{\frac{5}{13}} > a^{\frac{2}{7}}$; в) $a^{-0{,}83} > a^{0{,}14}$;

г) $a^{-4{,}2} > a^{-2{,}5}$; д) $a^{0{,}173} < a^{-\frac{11}{4}}$; е) $a^{-3} < a^{-3{,}01}$.

16. Что можно сказать о знаке числа k, если:

а) $5^k = 10$; б) $7^k = 1{,}003$; в) $0{,}3^k = 100$; г) $0{,}4^k = 18$?

17. Построить на одной координатной плоскости графики функций $y = 2^x$, $y = 2^{x-1}$, $y = 2^{x+1}$. Почему графики этих функций не пересекаются? Какие они имеют общие свойства?

18. Если графики функций $y = a^x$ и $y = b^x$ симметричны относительно оси ординат, то какое соотношение существует между a и b?

19. Имеют ли общую точку графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{5}{27}\right)^x$?

20. Как расположены графики функций $y = a^x$ и $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ относительно друг друга?

21. В какой точке график функции $y = 7{,}3^{-0{,}3x}$ пересекает ось ординат?

22. На примерах функций $y = x^2$ и $y = 2^x$ объяснить, чем отличается показательная функция от степенной?

23. Какие процессы в отраслях техники и в природе выражаются с помощью показательной функции?

24. Доказать: если показательная функция $y = a^x$ такая, что x изменяется в арифметической прогрессии, то соответствующие значения y образуют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

25. В какой точке пересекают ось ординат графики функций: а) $y = 12^x$; б) $y = 0{,}07^x$; в) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$?

26. В какой точке график функции $y = 3 \cdot 2^{7x}$ пересекает ось абсцисс?

27. Построить эскизы графиков функций: а) $y = -5 \cdot 3^{-0,2x}$, если $0 < a < 1$; б) $y = -3a^{4x}$, если $a > 1$.

28. Справедливо ли утверждение: «Если одно из значений функции $y = Ca^{kx}$ положительное, то функция принимает только положительные значения, а если отрицательное, — только отрицательные»?

§ 20. Решение показательных уравнений и неравенств

Показательные уравнения.

Показательными называют уравнения, у которых неизвестное входит только в показатели степеней при постоянных основаниях.

Простейшим показательным уравнением является

$$a^x = b,\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1. \quad (1)$$

Если вместо x в показателе степени стоит некоторая функция $f(x)$, то

$$a^{f(x)} = b,\ \ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1. \quad (2)$$

Общего метода решения показательных уравнений нет. Можно выделить несколько видов показательных уравнений и привести способы их решения.

Некоторые показательные уравнения можно свести к виду (1) или (2) при помощи основных показательных тождеств.

Самым распространенным является способ сведения обеих частей показательного уравнения к общему основанию. Рассмотрим примеры решения уравнений.

Примеры.

1. $5^x = 5^3$. Здесь $x = 3$, т. к. из равенства степеней при равных основаниях следует равенство их показателей.

2. $4^x = \frac{1}{16}$. Представим правую часть уравнения как степень 4; $4^x = 4^{-2}$. Отсюда $x = -2$.

3. $17^x = 1$, $17^x = 17^0$. Отсюда $x = 0$.

4. $5^x = 5\sqrt[3]{25}$; $5^x = 5 \cdot 5^{\frac{2}{3}}$; $5^x = 5^{1\frac{2}{3}}$. Отсюда $x = 1\frac{2}{3}$.

5. $3^x = \frac{9}{\sqrt[3]{9}}$; $3^x = \frac{9}{9^{\frac{1}{3}}}$; $3^x = 9^{1-\frac{1}{3}}$; $3^x = 9^{\frac{2}{3}}$; $3^x = 3^{2\cdot\frac{2}{3}}$; $3^x = 3^{\frac{4}{3}}$; $x = \frac{4}{3}$.

6. $(0{,}1)^x = 1000$; $\left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^3$; $(10^{-1})^x = 10^3$; $-x = 3$; $x = -3$.

Способ сведения к общему основанию применяется и при решении уравнений вида $a^{f(x)} = b$.

7. $3^{x^2-x-2} = 81$. Представим правую часть уравнения как степень 3: $3^{x^2-x-2} = 3^4$. Сравним показатели степеней в левой и правой частях: $x^2 - x - 2 = 4$, $x^2 - x - 6 = 0$. Отсюда $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

Проверка. Если $x_1 = -2$, то левая часть $3^{4+2-2} = 3^4$, а правая часть $81 = 3^4$. Если $x_2 = 3$, то $3^{9-3-2} = 3^4$.

Следовательно, $x_1 = -2$; $x_2 = 3$.

8. $3^{x^2-5x+6} = 1$.

$3^{x^2-5x+6} = 3^0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

9. $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$; $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{1}{\sqrt{7}}$; $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Отсюда $2x^2 + x - 0{,}5 = \frac{1}{2}$; $2x^2 + x - 1 = 0$; $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1\pm3}{4}$; $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

Оба значения x являются корнями данного уравнения.

Для решения некоторых уравнений используют специальные способы. Например, способ, который называют сведением к общему показателю.

10. $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$. Сведем произведение в левой части уравнения к общему показателю x.

Имеем: $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3$. Отсюда $x = 3$.

11. $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$. Перепишем это уравнение в виде $3^{2x+4} \cdot 2^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$; $\frac{3^{2x+4}}{3^{3x}} = \frac{2^{x+8}}{2^{2x+4}}$; $3^{2x+4-3x} = 2^{x+8-2x-4}$;

$3^{4-x} = 2^{4-x}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{4-x} = 1$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{4-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^0$; $4 - x = 0$; $x = 4$.

В отдельных случаях данное показательное уравнение преобразуют известными способами: замены неизвестного, сведения к квадратному уравнению, а потом используют известный способ.

12. $3^{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}-3\frac{1}{3}} = 1;\ \frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}-3\frac{1}{3}=0$.

Сделаем замену $\frac{x+1}{x-1} = y$, тогда $\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{y}$. Имеем: $y + \frac{1}{y} - \frac{10}{3} = 0$; $3y^2 + 3 - 10y = 0$; $3y^2 - 10y + 3 = 0$; $y_1 = \frac{1}{3}$; $y_2 = 3$; $\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{3}$; $x_1 = -2$; $\frac{x+1}{x-1} = 3$; $x_2 = 2$.

13. $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 6$.

Имеем сумму двух показательных функций. Найдем их произведение. Имеем:

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \left(\sqrt{3^2-(\sqrt{8})^2}\right)^x = 1.$$

Сделаем замену $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = t$; тогда $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Имеем: $t + \frac{1}{t} = 6$, откуда $t^2 - 6t + 1 = 0$, $t = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Следовательно, $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 3 + 2\sqrt{2}$, откуда $x = 2$; $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 3 - 2\sqrt{2}$, откуда $x = -2$.

Решение неравенств, содержащих показательную функцию. Простейшими являются показательные неравенства вида $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$. При их решении используют свойство монотонности показательной функции.

Функция $y = a^x$, если $a > 1$, возрастает, а если $0 < a < 1$ — убывает.

Для $a > 1$ большему значению функции соответствует больший показатель. Следовательно, для $a > 1$ решение данного неравенства сводится к решению неравенства $f(x) > \varphi(x)$. Если $0 < a < 1$, показательная функция убывает, т. е. большему значению функции соответствует меньший показатель, и для $0 < a < 1$ решение неравенства $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ сводится к решению неравенства $f(x) < \varphi(x)$.

Рассмотрим примеры решения неравенств.

Примеры.

1. $3^{2-x} > 27$. Перепишем данное неравенство в виде $3^{2-x} > 3^3$. Т. к. $a = 3$ и $3 > 1$, то $2 - x > 3$. Отсюда $-x > 1$; $x < -1$.

2. $0{,}5^{5-2x} < 8$. Учитывая, что $8 = 0{,}5^{-3}$, перепишем данное неравенство в виде $0{,}5^{5-2x} < 0{,}5^{-3}$. Показательная функция убывает, т. к. $0{,}5 < 1$. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $5 - 2x > -3$. Отсюда $x < 4$.

3. $2^{5x+6} > 2^{x^2}$. Т. к. здесь $a = 2$ $(2 > 1)$, то $5x + 6 > x^2$. Остается решить квадратное неравенство $x^2 - 5x - 6 < 0$. Имеем $(x + 1)(x - 6) < 0$. Отсюда $-1 < x < 6$.

4. $\dfrac{5^{4x}}{10^{3x}} < 20^x \cdot \dfrac{1}{16^{x-1}}$. Сведем данное неравенство к общему основанию:

$$\frac{5^{4x}}{2^{3x}\cdot 5^{3x}} < 5^x \cdot 4^x \cdot \frac{1}{2^{4(x-1)}};\ \frac{5^x}{2^{3x}} < \frac{5^x\cdot 2^{2x}}{2^{4(x-1)}};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}.$$

Т. к. $a < 1$ $\left(\frac{1}{2} < 1\right)$, то $3x > 2x - 4$, $x > -4$.

5. $5^{x^2+2x} > 5^3$. $a > 1$ $(5 > 1)$, поэтому показательная функция возрастает, и данное неравенство равносильно неравенству $x^2 + 2x > 3$, $x^2 + 2x - 3 > 0$. Решением этого неравенства, а значит, и исходного, является объединение интервалов $(-\infty; -3)$ и $(1; +\infty)$.

6. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x - \dfrac{28}{3^{x+1}} + 3 < 0$. Введем новую переменную $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, тогда $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x = y^2$, и неравенство будет иметь вид $y^2 - \dfrac{28}{3}y + 3 < 0$; $3y^2 - 28y + 9 < 0$. Решением этого квадратного неравенства является интервал $\left(\dfrac{1}{3}; 9\right)$, т. е. $\dfrac{1}{3} < y < 9$.

Возвращаясь к исходной переменной x, имеем:

$\dfrac{1}{3} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^x < 9$, $\dfrac{1}{3} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^x < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$. Функция $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ убывает. Следовательно, решением последнего неравенства будут числа, удовлетворяющие неравенство $-2 < x < 1$.

7. $5 \cdot 3^{3x^2} > 3 \cdot 5^{3x^2}$. Разделим почленно это неравенство последовательно на произведение $5 \cdot 3$ и на 5^{3x^2-1}. Получим $3^{3x^2-1} > 5^{3x^2-1}$; $\dfrac{3^{3x^2-1}}{5^{3x^2-1}} > \dfrac{5^{3x^2-1}}{5^{3x^2-1}}$; $\dfrac{3^{3x^2-1}}{5^{3x^2-1}} > 1$; $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{3x^2-1} > \left(\dfrac{3}{5}\right)^0$.

Основание $\dfrac{3}{5} < 1$. Итак, данная функция убывает, и $3x^2 - 1 < 0$, $x^2 < \dfrac{1}{3}$; $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

8. $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x < 5 \cdot 6^x$. Преобразуем неравенство к виду $3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x < 0$. Разделим обе части последнего неравенства на $3^{2x} > 0$. Получим

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2 - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x} < 0.$$

Сделаем замену $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = y$, тогда $3y^2 - 5y + 2 < 0$; $3y^2 - 5y + 2 = 0$; $y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6}$; $y_1 = \frac{2}{3}$; $y_2 = 1$; $\frac{2}{3} < y < 1$; $\frac{2}{3} < \left(\frac{2}{3}\right)^{x} < 1$; $0 < x < 1$.

9. $5 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-0,5} < 9^x + 4 \cdot 3^{2x-2}$.

Приведем это неравенство к виду $5 \cdot 3^{2x-1} - 3^{2x-1} < 3^{2x} + 4 \cdot 3^{2x-2}$. Вынесем общие множители за скобки:

$3^{2x-1}(5-1) < 3^{2x-2}(9+4)$; $4 \cdot 3^{2x-1} < 13 \cdot 3^{2x-2}$; $\frac{3^{2x-1}}{3^{2x-2}} < \frac{13}{4}$;

$3 < \frac{13}{4}$. Итак, решением неравенства является вся числовая прямая.

10. $2^{\sqrt{1-x}} \geq x$. Учтем, что выражение $2^{\sqrt{1-x}}$ имеет смысл, если $x \leq 1$. Тогда $2^{\sqrt{1-x}} > 2^0 = 1$. Следовательно, приходим к выводу, что $2^{\sqrt{1-x}} \geq x$, т. к. $x \leq 1$.

11. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} > 2 - x$. Решим данное неравенство графически, построив графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ и $y = 2 - x$ в одной системе координат. Графики пересекутся в двух точках с абсциссами $x_1 = -2$ и $x_2 \approx 1,7$. Множеством решений данного неравенства являются два промежутка $(-\infty; -2)$ и $(1,7; +\infty)$.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

К началу XVII ст. в математике избегали употребления дробных и отрицательных показателей степеней. Только в конце XVII ст. в связи с усложнением математических задач возникла необходимость распространить область определения показателя степени на все действительные числа. Обобщение понятия степени a^n, где n — любое действительное число, дало возможность рассматривать показательную функцию $y = a^x$ на множестве действительных чисел и степенную функцию $y = x^n$ — на множестве положительных чисел (для целых n степенная функция определена и для $x < 0$).

Вопрос, связанный с показательной функцией, разрабатывал Леонард Эйлер. В двух главах своей работы «Вступление к анализу» он описал «показательные и логарифмические количества». К первым принадлежат a^x, ко вторым — y^z. Даже и сам показатель может быть показательным «количеством», например в выражениях a^{az}, a^{yz}, y^{az}, x^{yz}. Эйлеру принадлежит открытие связи между показательной и тригонометрической функциями. Он доказал, что $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$. Отсюда при $x = \pi$ имеем $e^{\pi\sqrt{-1}} = \cos\pi + \sqrt{-1}\sin\pi$, или $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, а также соотношение $e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1$.

Показательную функцию вида $y = e^x$ начали изучать с 40-х годов XVII ст.

Иранский математик **ал-Караджи** (умер в 1016 г.) начал систематически рассматривать трехчленные уравнения, квадратные относительно некоторой степени неизвестного, а также уравнения, которые сводятся к ним делением на степень неизвестного, т. е. уравнения вида $ax^{2n} + bx^n = c$, $ax^{2n} + c = bx^n$, $bx^n + c = ax^{2n}$, $ax^{2n+m} = bx^{n+m} + cx^n$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какое уравнение называется показательным? Привести примеры.

2. Имеет ли решение показательное уравнение $a^x = y$, если $y < 0$?

3. В чем заключается способ приведения к общему основанию при решении показательных уравнений?

4. В чем заключается способ вынесения за скобки общего множителя при решении показательных уравнений?

5. Как решают показательные уравнения вида $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$?

6. Как решить графически уравнение: а) $2^x = x + 3$; б) $2^x = x^3$; в) $2^x = \frac{8}{x}$?

7. Записать в аналитической форме показательное неравенство простейшего вида.

8. Какое свойство показательной функции $y = a^x$ используют при решении показательных неравенств? Рассмотреть случаи $a > 1$ и $0 < a < 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

174. Решить показательное уравнение:

А

Применить способ приведения к общему основанию:

1) $2^x = 64$; 2) $2^{2x} = 512$; 3) $2^{-x} = 16$; 4) $2^{x+1} = 32$;

5) $3^{2x-1} = 81$; 6) $\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{25}$; 7) $3^{2x-1} = 1$;

8) $a^{x^2-7x+12} = 1$; 9) $a^{(x-1)(x+2)} = 1$.

Применить способ приведения к общему показателю:

10) $2^x \cdot 5^x = 0{,}01$; 11) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$.

Решить способом вынесения общего множителя за скобки:

12) $2^{x+2} - 2^x = 96$; 13) $7^x - 7^{x-1} = 6$; 14) $3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$.

Решить уравнение приведением к виду $a^{2x} + a^x + b = 0$:

15) $4^x + 2^x = 72$; 16) $4^x + 2^{x+1} = 8$;

Б

17) $\sqrt[4]{a^{x+1}} = \sqrt[3]{a^{x-2}}$; 18) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^8$;

19) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$; 20) $(0{,}25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$;

21) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$;

22) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$;

23) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$; 24) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$;

25) $4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x+1} = 60$;

26) $9^{\sqrt{x-5}} - 27 = 6 \cdot 3^{\sqrt{x-5}}$;

27) $5 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-0{,}5} = 9^x + 4 \cdot 3^{2x-2}$;

28) $2^{3x-3} - 2 + 2^{3-3x} = 0$;

В

29) $3^{2x-1} \cdot 5^{3x+2} = \frac{9}{5} \cdot 5^{2x} \cdot 3^{3x}$;

30) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$;

31) $2^{3(x-1)} - 128 \cdot 2^{3(2-x)} = 48$; 32) $2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-2} + 1 = 0$;

33) $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$;

34) $\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4-\sqrt{15}\right)^x=62$;

35) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$;

36) $\sqrt[x+1]{a^3}\cdot\sqrt[x+1]{a^2}=\frac{1}{a^5}\sqrt[4]{(a^x)^{10}}$; 37) $2^{x-2}=3^{x-2}$;

38) $(a^4-2a^2b^2+b^4)^{x-1}=\frac{(a-b)^{2x-2}}{(a+b)^2}$; 39) $\frac{6^{x^2}}{2^{-15}}=\frac{3^{15}}{6^{12-12x}}$;

40) $7^{2\sin x+\sqrt{3}}=1$; 41) $(\sqrt{3})^{\sqrt{10x-5}+\sqrt{10x-29}}=\left(\frac{1}{27}\right)^{-1}$;

42) $2^{\sqrt{x+1}}\cdot\sqrt{2^{\sqrt{6}}}=4^{\sqrt{x+1}}$; 43) $4^{2x}-3^{2x-\frac{1}{2}}=3^{2x+\frac{1}{2}}-2^{4x-1}$;

44) $5^{2x}-7^x-5^{2x}\cdot35+7^x\cdot35=0$;

45) $2^{2x}\cdot9^x-2\cdot6^{3x-1}+4^{2x-1}\cdot3^{4x-2}=0$;

46) $3^{2x+4}+45\cdot6^x-9\cdot2^{2x+2}=0$; 47) $3\cdot16^x+2\cdot81^x=5\cdot36^x$;

48) $5^{x^2-6x-35\frac{1}{3}}=625\sqrt[3]{25}$; 49) $4^{4(x+1)}=\sqrt[5]{16^{x+100}}$;

50) $0{,}6^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$.

175. Решить показательное неравенство:

А

1) $2^x>\frac{1}{2}$; 2) $10^{3x+2}>100$; 3) $(0{,}3)^x>0{,}09$;

4) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x^2-x}<\left(\frac{5}{6}\right)^6$; 5) $0{,}5^{2x}<1$; 6) $4^{5-2x}\le0{,}25$;

7) $\frac{1}{7^{3x}}<49$; 8) $2^{x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$;

Б

9) $\left(\sqrt{3}\right)^x\le\frac{1}{9}$; 10) $0{,}7^{5-2x}<0{,}49$; 11) $0{,}7^{8-x^2}>0{,}7^{2x}$;

12) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3}>4^{1-2x}$; 13) $16^{\frac{x+10}{x-10}}<0{,}125$;

14) $3 \cdot 9^{x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{3x-1}$; 15) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} > \sqrt[4]{1{,}5}$;

16) $(\sqrt{13})^{x^2-2} > (\sqrt{14})^{x^2-2}$; 17) $2^{x^2-6x-2{,}5} < 16\sqrt{2}$;

18) $2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-2} + 1 < 0$;

В

19) $8 \cdot 7^{2x^3-x} - 7 \cdot 8^{2x^2-x} > 0$; 20) $2 \cdot 8^{4-5x} < \left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}$;

21) $12^{x} \cdot 11^{\sqrt{x}} - 11^{\sqrt{x}} \cdot 12^{\sqrt{x}} < 0$; 22) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < (\sqrt{5})^{x^2+3{,}75}$;

23) $9^{x} + 6^{x} > 2^{2x+1}$; 24) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-3} < \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{x}}$;

25) $4^{x} - 3^{x-0{,}5} > 3^{x+0{,}5} - 2^{2x-1}$; 26) $9^{x} - \frac{28}{3^{2x-1}} + \frac{1}{3} > 0$;

27) $2^{x+6} + 2^{x+7} > 24$; 28) $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x} \geq 1$;

29) $25^{-x} + 5^{-x+1} \geq 50$; 30) $5 \cdot 4^{x} + 2 \cdot 25^{x} \leq 7 \cdot 10^{x}$;

31) $x^2 \cdot 3^{x} - 3^{x+1} \leq 0$; 32) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$;

33) $5^{2x+1} > 5^{x} + 4$; 34) $4^{x} \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$;

35) $0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$.

5 ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь.

Пьер Лаплас

§ 21. Логарифм числа

Понятие логарифма. Рассмотрим равенство $4^3 = 64$. В этом равенстве число 3 — показатель степени, в которую нужно возвести число 4, чтобы получить 64. Аналогично в равенстве $5^{-2} = \frac{1}{25}$ число (−2) — показатель степени, в которую нужно возвести число 5, чтобы получить $\frac{1}{25}$. В общем случае в равенстве $a^x = N$ число x — показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число N.

Рассмотрим уравнение $a^x = N$, где a и N — некоторые числа, причем $a > 0$ и $a \neq 1$. Если $N \leq 0$, то это уравнение не имеет корней, т. к. значения показательной функции $y = a^x$ положительны при любом действительном x.

Для $N > 0$ уравнение имеет корень, и причем единственный. Действительно, областью значений показательной функции $y = a^x$ при $a \neq 1$ является множество положительных чисел (следовательно, корень уравнения существует). Кроме того, каждое свое значение показательная функция принимает лишь при одном значении аргумента (следовательно, этот корень единственный).

Корень уравнения $a^x = N$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют логарифмом числа N при основании a.

Логарифмом числа N при основании a ($a > 0$ и $a \neq 1$) называется показатель степени x, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число N.

Слово «логарифм» заменяют символом log, справа от которого (чуть ниже) записывают число a, которое называют основанием.

Так, вместо того чтобы писать «логарифм числа 81 при основании 3» сокращенно пишут $\log_3 81$.

То, что число x является логарифмом числа N при основании a, записывают так: $\log_a N = x$.

Это равенство читают так: логарифм числа N при основании a равен x. Например, из равенств $5^3 = 125$; $6^{-2} = \frac{1}{36}$; $7^0 = 1$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$ следует, что $\log_5 125 = 3$; $\log_6 \frac{1}{36} = -2$; $\log_7 1 = 0$; $\log_{\frac{1}{2}} 64 = -6$.

Заметим, что выражения $\log_4(-64)$, $\log_3 0$ не имеют смысла, т. к. уравнения $4^x = -64$, $3^x = 0$ не имеют корней.

Выражение $\log_a N$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, имеет смысл лишь при $N > 0$.

Логарифмическое равенство $\log_a N = b$ и показательное равенство $a^b = N$ выражают одно и то же соотношение между числами a, b и N.

Из этих равенств можно найти одно из трех чисел, содержащихся в них, если заданы два других.

В соответствии с этим можно решить три задачи.

1) Найти число N по данному его логарифму b и основанию a.

2) Найти основание a по заданному числу N и его логарифму b.

3) Найти логарифм b данного числа N при основании a.

Широко используют так называемые десятичные логарифмы, т. е. логарифмы при основании 10. Для них применяют вместо знака $\log_{10}$ знак lg (без обозначения основания). Например, $\lg 10 = 1$, $\lg 100 = 2$, $\lg 1000 = 3$, $\lg 0{,}1 = -1$.

Основное логарифмическое тождество. Рассмотрим показательное равенство

$$a^x = N. \tag{1}$$

По определению логарифма,

$$x = \log_a N. \tag{2}$$

Подставляя в равенство (1) значение x из равенства (2), получаем:

$$\boxed{a^{\log_a N} = N}. \tag{3}$$

Равенство (3) называется **основным логарифмическим тождеством.** Это тождество является краткой записью определения логарифма: $\log_a N$ — это показатель степени, в которую нужно возвести основание степени a, чтобы получить N. Например: $5^{\log_5 125} = 125$; $10^{\lg 1000} = 1000$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 9} = 9$.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

1. Записать в виде логарифмических равенств:

а) $2^7 = 128$; б) $5^{-3} = \frac{1}{125}$; в) $216^{\frac{1}{3}} = 6$.

Решение. Применяя определение логарифма данного числа при данном основании, имеем:

а) $\log_2 128 = 7$; б) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$; в) $\log_{216} 6 = \frac{1}{3}$.

2. По определению логарифма проверить справедливость таких равенств: а) $\log_5 625 = 4$; б) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5$.

Это действительно так, поскольку: а) $5^4 = 625$, б) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

3. Пользуясь определением логарифма, найти, какое число имеет логарифм 3 при основании 7.

Решение. По условию $\log_7 x = 3$, отсюда $x = 7^3$; $x = 343$.

4. При каком основании логарифм числа 10 000 равен 4?

Решение. Имеем: $\log_x 10\,000 = 4$, $x^4 = 10\,000$, $x = \sqrt[4]{10\,000}$, $x = 10$.

5. Найти: а) логарифм числа $\frac{1}{343}$ при основании 7;

б) логарифм числа 16 при основании $\frac{1}{2}$.

Решение. Имеем: а) $\log_7 \frac{1}{343} = x$; $7^x = \frac{1}{343}$; $7^x = 7^{-3}$; $x = -3$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = x$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^4$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$, $x = -4$.

6. Найти основание x, если $\log_x \frac{1}{49} = -2$.

Решение. Имеем: $x^{-2} = \frac{1}{49}$, $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{49}$; $x^2 = 49$; $x = 7$.

7. Найти число x, если: а) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$; б) $\log_{0,1} x = -1$.

Решение. Переходя от логарифмических равенств к показательным, имеем: а) $x = (\sqrt{2})^4 = 4$; б) $x = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10$.

8. При каком основании: а) логарифм числа 3 равен 3; б) логарифм числа $\frac{1}{3}$ равен $\frac{1}{3}$?

Решение. Имеем: а) $\log_x 3 = 3$, или $x^3 = 3$, отсюда $x = \sqrt[3]{3}$;

б) $\log_x \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, или $x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$. Возведя обе части этого равенства в куб, получим: $x = \frac{1}{27}$.

9. Вычислить выражение: а) $3\log_2 16 + 4\log_3 \frac{1}{27}$; б) $\log_3\log_3 27$.

Решение. Имеем: а) $3\log_2 16 + 4\log_3 \frac{1}{27} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0$; б) обозначим $\log_3\log_3 27 = x$. По определению логарифма, $3^x = \log_3 27$, или $3^x = 3$, отсюда $x = 1$.

10. С помощью основного логарифмического тождества преобразовать равенство $2^5 = 32$.

Решение. Имеем: $2^{\log_2 32} = 32$.

11. Вычислить: а) $1{,}9^{\log_{1,9} 8}$; б) $a^{2\log_a N}$.

Решение. Имеем: а) $1{,}9^{\log_{1,9} 8} = 8$; б) $a^{2\log_a N} = (a^{\log_a N})^2 = N^2$.

12. Вычислить: а) $4^{-\log_4 20}$; б) $5^{\log_5 9 - \log_5 10}$; в) $49^{\log_7 8}$.

Решение. а) По определению степени с отрицательным показателем, $4^{-\log_4 20} = \frac{1}{4^{\log_4 20}} = \frac{1}{20}$;

б) В показателе имеем разность, а показатели степеней при делении вычитаются. Имеем: $5^{\log_5 9 - \log_5 10} = \frac{5^{\log_5 9}}{5^{\log_5 10}} = \frac{9}{10}$.

Учитывая, что $49 = 7^2$, имеем:
$49^{\log_7 8} = (7^{\log_7 8})^2 = 8^2 = 64$. Таким образом, $49^{\log_7 8} = 64$.

13. Вычислить: а) $1 + 5^{\log_5 8}$; б) $2^{1 + 3\log_2 5}$; в) $\frac{a^{3\log_a N} + a^{2\log_a N}}{N^2}$; г) $81^{0,5\log_3 7}$; д) $10^{\lg 2}$; е) $10^{2 + \lg 0,05}$.

Решение. Имеем: а) $1 + 5^{\log_5 8} = 1 + 8 = 9$;

б) $2^{1 + 3\log_2 5} = 2 \cdot 2^{3\log_2 5} = 2 \cdot (2^{\log_2 5})^3 = 2 \cdot 5^3 = 250$;

в) $\frac{a^{3\log_a N} + a^{2\log_a N}}{N^2} = \frac{(a^{\log_a N})^3 + (a^{\log_a N})^2}{N^2} = \frac{N^3 + N^2}{N^2} = N + 1$;

г) $81^{0,5\log_3 7} = (3^{0,5\log_3 7})^4 = 3^{2\log_3 7} = (3^{\log_3 7})^2 = 7^2 = 49$;

д) $10^{\lg 2} = 2$; е) $10^{2 + \lg 0,05} = 10^2 \cdot 10^{\lg 0,05} = 100 \cdot 0{,}05 = 5$.

Основные свойства логарифмов выражаются в ряде теорем, на которых основывается практическое использование логарифмов.

Теорема 1.

Логарифм произведения двух положительных сомножителей равен сумме их логарифмов, т. е.

$$\boxed{\log_a(N_1 N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2, \text{ где } N_1 > 0, N_2 > 0}.$$

Доказательство. Обозначим $\log_a N_1 = x_1$ и $\log_a N_2 = x_2$. По определению логарифма, $N_1 = a^{x_1}$, $N_2 = a^{x_2}$. Умножая почленно эти равенства, получаем: $N_1 N_2 = a^{x_1 + x_2}$. Здесь $x_1 + x_2$ — показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число, равное произведению. Поэтому можно записать: $\log_a(N_1 N_2) = x_1 + x_2$. Подставляя вместо x_1 и x_2 их значения через логарифмы, имеем: $\log_a(N_1 N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$. Теорема доказана для отдельного случая — для двух множителей. Однако ее можно доказать и для любого конечного числа множителей, т. к. при нахождении произведения любого конечного числа степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются. Таким образом, $\log_a(N_1 N_2 N_3 \ldots N_n) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \ldots + \log_a N_n$, где $N_1 > 0$, $N_2 > 0, \ldots, N_n > 0$ (предлагаем самостоятельно доказать теорему для случая трех сомножителей).

Отметим, что для доказательства этой теоремы можно было воспользоваться основным логарифмическим тождеством, а именно: пусть, как и раньше, $N_1 = a^{x_1}$, $N_2 = a^{x_2}$. В силу основного логарифмического тождества, $N_1 = a^{\log_a N_1}$, $N_2 = a^{\log_a N_2}$. Перемножив почленно эти равенства, получим: $N_1 N_2 = a^{\log_a N_1} a^{\log_a N_2} = a^{\log_a N_1 + \log_a N_2}$. По определению логарифма,

$$\log_a(N_1 N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2.$$

Теорема 2.

Логарифм частного двух положительных чисел (дроби) равен разности логарифмов делимого и делителя (числителя и знаменателя), т. е.

$$\boxed{\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2, \text{ где } N_1 > 0,\ N_2 > 0}\ .$$

Доказательство. Пусть $\log_a N_1 = x_1$ и $\log_a N_2 = x_2$. Тогда $N_1 = a^{x_1}$, $N_2 = a^{x_2}$. Разделим почленно первое равенство на второе: $\frac{N_1}{N_2} = a^{x_1 - x_2}$. Здесь $x_1 - x_2$ — показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число, равное частному $\frac{N_1}{N_2}$. Итак, имеем: $\log_a \frac{N_1}{N_2} = x_1 - x_2$. Заменяя x_1

и x_2 на их выражения через логарифмы, окончательно получим:

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2.$$

Следствие.

(Докажите это утверждение самостоятельно. Можно также доказать теорему 2, используя основное логарифмическое тождество.)

Теорема 3.

$$\log_a(N^m) = m\log_a N, \text{ где } m \text{ — любое число, } N > 0 \quad .$$

Доказательство. Пусть $\log_a N = x$, тогда $N = a^x$. Возведем обе части последнего равенства в степень m: $N^m = a^{mx}$. Здесь mx — показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число, равное N^m. Таким образом, переходя к логарифмам, получаем: $\log_a(N^m) = mx$. Заменим x его выражением через логарифм и окончательно имеем: $\log_a(N^m) = m\log_a N$.

Теорема 4.

$$\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{\log_a N}{k} \quad .$$

Доказательство. Пусть нужно найти $\log_a \sqrt[k]{N}$. Заменив корень степенью с дробным показателем и применив теорему 3, получим:

$$\log_a \sqrt[k]{N} = \log_a N^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}\log_a N = \frac{\log_a N}{k}.$$

Теорема 5.

Если логарифмы двух положительных чисел при одном и том же основании равны, то и сами числа равны. И наоборот, если два положительных числа равны, то и их логарифмы при одном и том же основании равны.

Доказательство. Пусть $\log_a b = \log_a c$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$. Обозначим $\log_a b = x$, $\log_a c = y$. Тогда $a^x = b$, $a^y = c$. Учитывая свойство показательной функции, если $x = y$, то $b = c$.

Обратное утверждение предлагаем доказать самостоятельно.

К основным свойствам логарифмов относятся еще такие:

1) Логарифм единицы равен нулю. Это следует из определения степени с нулевым показателем. Если $a \neq 0$, $a^0 = 1$, но тогда $\log_a 1 = 0$.

2) Логарифм основания равен единице, т. е. $\log_a a = 1$. Это следует из того, что $a^1 = a$.

Основные свойства логарифмов широко используются при преобразовании выражений, содержащих логарифмы. Отдельным видом таких преобразований является логарифмирование выражений.

Прологарифмировать одночлен означает выразить его логарифм через логарифмы положительных чисел (обозначенных цифрами и буквами), входящих в его состав.

Пользуясь теоремами о логарифме произведения, частного, степени и корня, можно прологарифмировать любое одночленное выражение.

Приведенные выше равенства справедливы при любом основании a, удовлетворяющем условие $a > 0$, $a \neq 1$. Условимся во время логарифмирования основанием считать число 10.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

Прологарифмировать выражение:

1. $x = 5ac$ $(a > 0,\ c > 0)$.

Решение. Данное выражение — произведение, поэтому, по теореме 1: $\lg x = \lg 5 + \lg a + \lg c$.

2. $x = \frac{m}{n}$ $(m > 0,\ n > 0)$.

Решение. По теореме 2: $\lg x = \lg m - \lg n$.

3. $x = 11a^2b^3$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Решение. По теоремам 1 и 3:

$$\lg x = \lg 11 + 2\lg a + 3\lg b.$$

4. $x = \dfrac{a^4b}{7c^5}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

Решение. $\lg x = \lg (a^4b) - \lg (7c^5) = 4\lg a + \lg b - \lg 7 - 5\lg c$.

5. $x = \sqrt[4]{3a^3b}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Решение. По теореме 4:

$$\lg x = \frac{1}{4}\lg (3a^3b) = \frac{1}{4}\lg 3 + \frac{3}{4}\lg a + \frac{1}{4}\lg b.$$

6. $x = \dfrac{(a+b)^4\sqrt[5]{c}}{\sqrt[3]{(a-b)^2d^2}}$, где $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$.

Решение. $\lg x = 4\lg (a + b) + \dfrac{1}{5}\lg c - \dfrac{1}{3}(2\lg (a - b) + 2\lg d)$.

7. Найти x, если: $\log_7 x = \log_7 12 - \log_7 4$.

Решение. $\log_7 x = \log_7 \dfrac{12}{4}$; $\log_7 x = \log_7 3$.

Однако если логарифмы чисел x и 3 при одном и том же основании 7 равны, то и числа будут равны. Таким образом, $x = 3$.

8. Вычислить, не пользуясь вспомогательными средствами:

а) $\log_3 2 + \log_3 4{,}5$.

Решение. $\log_3 2 + \log_3 4{,}5 = \log_3(2 \cdot 4{,}5) = \log_3 9 = 2$.

б) $\log_2 7 - \log_2 \dfrac{7}{16}$.

Решение. $\log_2 7 - \log_2 \dfrac{7}{16} = \log_2 \dfrac{7}{\frac{7}{16}} = \log_2 16 = 4$.

9. Пусть $\log_a b = 0{,}45$; $\log_a c = 0{,}4$; $\log_a d = 0{,}85$; $\log_a k = -0{,}25$. Найти $\log_a x$, если $x = \dfrac{b^2\sqrt[8]{c}}{dk^3}$.

Решение. $\log_a x = 2\log_a b + \dfrac{1}{8}\log_a c - \log_a d - 3\log_a k = 0{,}9 + 0{,}05 - 0{,}85 + 0{,}75 = 0{,}85$.

Некоторые важные тождества, содержащие логарифмы.

1) Докажем тождество $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, или $\log_b a \log_a b = 1$.

Пусть $\log_b a = x$. Тогда, по определению логарифма, $b^x = a$.

Прологарифмировав это равенство при основании a, получим: $x\log_a b = 1$, отсюда $x = \dfrac{1}{\log_a b}$, т. е. $\boxed{\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}}$.

2) Докажем тождество $\log_a N = \log_{a^k} N^k$, имеющее такое содержание: если число, стоящее под знаком логарифма, и основание логарифма возвести в произвольную степень, то значение логарифма не изменится.

Пусть $\log_a N = x$. Тогда $a^x = N$ и $a^{kx} = N^k$, или $(a^k)^x = N^k$. Здесь x — показатель степени, в которую нужно возвести выражение a^k, чтобы получить N^k. Таким образом, $x = \log_{a^k} N^k$.

Подставляя вместо x его значение, окончательно получаем:

$$\boxed{\log_a N = \log_{a^k} N^k}.$$

Используя это тождество, имеем, например: $\log_2 5 = \log_{2^3} 5^3 = \log_8 125$; $\log_{\sqrt[3]{a}} x = \log_a x^3 = 3\log_a x$.

3) Докажем тождество $\log_{a^n} N = \frac{1}{n}\log_a N$.

Пусть $\log_{a^n} N = x$, тогда $a^{nx} = N$. Возведем обе части последнего равенства в степень $\frac{1}{n}$, получаем: $a^x = N^{\frac{1}{n}}$. Теперь прологарифмируем последнее равенство по основанию a. Имеем: $x = \frac{1}{n}\log_a N$, т. е. $\boxed{\log_{a^n} N = \frac{1}{n}\log_a N}$.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

1. Какое из чисел больше: $\log_4 3$ или $\log_{10} 9$?

$\log_4 3 = \log_{4^2} 3^2$, следовательно, $\log_4 3 = \log_{16} 9$. Таким образом, $\log_4 3 < \log_{10} 9$.

2. Вычислить $\log_{\sqrt[3]{3}} 8$, зная, что $\log_{12} 3 = a$.

$$\log_{\sqrt[3]{3}} 8 = \log_3 64 = \log_3 4^3 = 3\log_3 4 = 3\log_3 \frac{12}{3} = 3(\log_3 12 - \log_3 3).$$

Используя равенство $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, получаем $\log_3 12 = \frac{1}{\log_{12} 3}$. Таким образом, $\log_{\sqrt[3]{3}} 8 = 3(\log_3 12 - \log_3 3) = 3\left(\frac{1}{\log_{12} 3} - 1\right) = 3\left(\frac{1}{a} - 1\right) = \frac{3(1-a)}{a}$.

Потенцирование. Преобразование, с помощью которого по данному логарифму числа (выражения) определяют само число (выражение), называют **потенцированием.** Это преобразование является обратным логарифмированию.

Применяя теоремы логарифмирования, иногда можно выражения, содержащие логарифмы чисел или выражений, преобразовать в логарифм одного числа или выражения.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

1. Найти x по данному его логарифму:

$$\lg x = 5\lg a - 3\lg c.$$

По теореме о логарифме степени, $\lg x = \lg a^5 - \lg c^3$; по теореме о логарифме частного, $\lg x = \lg \frac{a^5}{c^3}$.

Если логарифмы выражений x и $\frac{a^5}{c^3}$ при одинаковых основаниях равны, то и выражения будут равны, т. е. $x = \frac{a^5}{c^3}$.

2. Найти z по данному его логарифму:

$$\lg z = \frac{11}{12}\lg a - \lg 7 - \lg b.$$

Имеем: $\lg z = \lg \frac{\sqrt[12]{a^{11}}}{7b}$; $z = \frac{\sqrt[12]{a^{11}}}{7b}$.

Здесь потенцирование выполнено без промежуточных записей.

3. Освободиться от логарифмов: $\lg B - \lg A = \frac{b}{c}\lg m - 2\lg n$.

Имеем: $\lg \frac{B}{A} = \lg \frac{\sqrt[c]{m^b}}{n^2}$; $\frac{B}{A} = \frac{\sqrt[c]{m^b}}{n^2}$.

4. Упростить выражение:

а) $\lg \frac{(m+n)^2}{a} + \lg \frac{ab}{m^2-n^2} + \lg \frac{m-n}{b}$.

Имеем: $\lg\left(\frac{(m+n)^2}{a} \cdot \frac{ab}{m^2-n^2} \cdot \frac{m-n}{b}\right) = \lg (m+n)$.

б) $\lg N = \frac{3}{4}\lg a - 2\lg b - \lg c + \lg (a+b)$.

Имеем: $\lg N = \lg \frac{\sqrt[4]{a^3}\,(a+b)}{b^2c}$, отсюда $N = \frac{\sqrt[4]{a^3}\,(a+b)}{b^2c}$.

Переход от одного основания логарифмов к другому. Часто необходимо осуществить переход от логарифмов с одним основанием к логарифмам с другим основанием. Пусть известен $\log_a N$ и нужно найти $\log_b N = x$ (x — неизвестное число), где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. По определению логарифма, $b^x = N$. Прологарифмируем последнее равенство по основанию a. Имеем: $x\log_a b = \log_a N$. Отсюда $x = \frac{\log_a N}{\log_a b}$, т. е.

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}. \qquad (1)$$

Таким образом, логарифм любого положительного числа N при основании b равен логарифму этого же числа при другом основании a, деленному на логарифм числа b при основании a. Эту зависимость применяют в таком виде:

$$\boxed{\log_a N = \log_b N \log_a b}. \qquad (2)$$

Еще раз подчеркнем, что формулы (1) и (2) справедливы, если обе их части имеют смысл, т. е. $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ и $b \neq 1$.

Таким образом, любой логарифм можно представить в виде отношения двух логарифмов, взятых с одним и тем же основанием. Например, $\log_5 10$ можно представить при основаниях 2 и 3 ($a > 0$, $a \neq 1$).

Так: $\log_5 10 = \dfrac{\log_2 10}{\log_2 5}$; $\log_5 10 = \dfrac{\log_3 10}{\log_3 5}$; $\log_5 10 = \dfrac{\log_a 10}{\log_a 5}$.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

1. $\log_{27} 3x$ записать по основанию 3.

Имеем: $\log_{27} 3x = \dfrac{\log_3 3x}{\log_3 27} = \dfrac{\log_3 3 + \log_3 x}{3} = \dfrac{1 + \log_3 x}{3}$.

2. Зная, что $\log_{12} 2 = a$, найти $\log_6 16$.

Имеем: $\log_6 16 = \dfrac{\log_{12} 16}{\log_{12} 6} = \dfrac{\log_{12} 2^4}{\log_{12}\left(\frac{12}{2}\right)} = \dfrac{4 \log_{12} 2}{1 - \log_{12} 2} = \dfrac{4a}{1-a}$.

3. Вычислить $\log_9 5 \log_{25} 27$.

Воспользуемся зависимостью $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ и приведем логарифмы к основанию 10:

$$\log_9 5 \log_{25} 27 = \frac{\lg 5}{\lg 9} \cdot \frac{\lg 27}{\lg 25} = \frac{\lg 5}{2 \lg 3} \cdot \frac{3 \lg 3}{2 \lg 5} = \frac{3}{4}.$$

Отметим, что чаще всего используют логарифмы при основании 10, т. е. десятичные логарифмы.

Натуральные логарифмы. В математических исследованиях используют логарифмы с иррациональным основанием, приближенное значение которого равно 2,718281828459045..., или ≈ 2,718. Леонард Эйлер предложил обозначить это число буквой e. Его называют **неперовим числом** в честь шотландского математика Джона Непера (1550—1617). Итак, $e =$ 2,718281828459045... .

Логарифм с основанием e называют **натуральным**, или неперовым, и обозначают $\ln x$. Здесь основание e не пишут, а только имеют в виду.

От названия «логарифм» оставили лишь одну букву l: вторая буква n является начальной в слове «натуральный» (латинское — *naturalis*). Таким образом,

$$\ln x = \log_e x.$$

Например, $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$, $\ln 2 = 0{,}693$, $\ln 3 = 1{,}098$, $\ln 10 = 2{,}303$.

По основному логарифмическому тождеству для любого положительного числа $e^{\ln a} = a$.

Если известны десятичные логарифмы чисел, то, используя формулу (2), можно вычислить соответствующие натуральные логарифмы. Данной формулой можно воспользоваться и для вычисления десятичных логарифмов чисел, если известны их натуральные логарифмы.

Имеем: $\ln x = \lg x \ln 10$, но $\ln 10 \approx 2{,}303$, поэтому $\ln x = 2{,}303 \lg x$. Эта формула дает возможность вычислять натуральные логарифмы чисел, если известны их десятичные логарифмы. Данной формулой можно пользоваться также и для вычисления десятичных логарифмов чисел, если известны их натуральные логарифмы, переписав ее в виде: $\lg x = \frac{1}{2{,}303} \ln x = 0{,}434 \ln x$. Соответственно $\ln x = \frac{1}{0{,}434} \lg x$.

Число $M = \lg e \approx 0{,}434$ называют **модулем перехода** от натуральных логарифмов к десятичным. Таким образом, $\lg x = M \ln x$, $\ln x = \frac{\lg x}{M}$. Например, $\ln 2 = \lg 2 \cdot \frac{1}{\lg e} \approx 0{,}3010 \cdot \frac{1}{\lg 2{,}718} \approx 0{,}3010 \cdot 2{,}303 \approx 0{,}6932$.

Натуральный логарифм приближенно в 2,3 раза больше десятичного логарифма того же числа.

1. Что называется логарифмом числа при данном основании?

2. По определению логарифма определить, какое из трех утверждений правильное: 1) логарифм — степень; 2) логарифм — показатель степени; 3) логарифм — основание степени.

3. Дано равенство $27^{\frac{2}{3}} = 9$. Определить, что здесь является логарифмом, какого числа и при каком основании.

4. Доказать, что $\log_a a = 1$.

5. Представить в показательной форме логарифмическое равенство:

1) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$.

6. Найти $\log_a \frac{P}{Q}$, если $\log_a P = p$ и $\log_a Q = q$.

7. Найти $\log_a (N)^5$, если $\log_a N = n$.

8. Найти $\log_a (N^{\frac{1}{4}})$, если $\log_a N = 4{,}28$.

9. Зная $\log_a C$, найти $\log_a \sqrt[6]{C}$.

10. Правильно ли, что $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$?

11. Доказать, что $\log_a 2 + \log_a 0{,}5 = 0$.

12. Правильно ли, что $\log_a ab = 1 + \log_a b$?

13. Какое действие нужно выполнить, чтобы из равенства $\log x = \frac{2}{3} \log a$ получить равенство $x = \sqrt[3]{a^2}$?

14. Назовите действие, обратное потенцированию.

15. Что такое функция, обратная данной функции f?

16. Как получить функцию, обратную данной?

17. Указать особенности расположения графиков двух взаимно обратных функций.

18. Если графики двух функций симметричны друг другу относительно биссектрисы I и III координатных углов, то означает ли это, что функции взаимно обратны?

УПРАЖНЕНИЯ

А

176. Проверить справедливость равенства:

1) $\log_4 16 = 2$; 2) $\log_5 125 = 3$; 3) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$;

4) $\log_2 \frac{1}{64} = -6$; 5) $\lg 1 = 0$; 6) $\lg 100 = 2$.

177. Используя знак логарифма, выразить показатель степени из равенства:

1) $3^4 = 81$; 2) $4^{-2} = \frac{1}{16}$; 3) $8^{\frac{1}{3}} = 2$; 4) $\sqrt[3]{27} = 3$.

178. Найти логарифм чисел с основанием 2: 1) 8; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) 0,5; 5) 512; 6) $\frac{1}{128}$.

179. Найти: 1) $\log_3 \frac{1}{9}$; 2) $\log_4 64$; 3) $\log_3 \frac{1}{81}$; 4) $\log_{\sqrt{2}} 8$.

180. Найти число x, если: 1) $\log_5 x = 2$; 2) $\log_6 x = 3$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$; 4) $\log_{13} x = 0$; 5) $\log_4 x = 1{,}5$; 6) $\lg x = -3$.

181. Имеет ли смысл выражение: 1) $\log_4(-64)$; 2) $\log_5 0$; 3) $\log_2(-4)^3$?

182. Записать в логарифмическом виде равенство: 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = 2{,}25$; 2) $0{,}1^2 = 0{,}01$; 3) $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$; 4) $\sqrt[3]{343} = 7$.

183. Найти логарифм числа с основанием 3: 1) 3; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 81; 4) 1; 5) $\frac{1}{243}$; 6) $\sqrt{3}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) $\frac{1}{9}\sqrt{3}$.

184. Найти x, если: 1) $\log_{3\sqrt{3}} x = -\frac{2}{3}$; 2) $\log_x \frac{1}{81} = 4$; 3) $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4}$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} x = 1$.

185. Имеет ли смысл выражение: 1) $\log_6 (-6)^2$; 2) $-\log_8 16$?

186. Вычислить: 1) $5\log_5 25 - 4\log_4 16$; 2) $\log_2 \log_2 16$.

187. Найти $\log_a b$, если $a^2 = b$.

B

188. Найти логарифм числа: 1) $\log_{0,2} 25$; 2) $\log_5 0{,}04$; 3) $\log_2 4\sqrt{2}$; 4) $\log_{2,5} 0{,}16$; 5) $\log_a a$; 6) $\log_a 1$; 7) $\log_a \sqrt{a}$; 8) $\log_a \sqrt[5]{a^3}$.

189. Найти основание логарифма: 1) $\log_x 3 = 0{,}25$;

2) $\log_x 125 = -\frac{3}{2}$; 3) $\log_x 0{,}64 = -2$; 4) $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{4}$;

5) $\log_x(a^2 + 2a + 1) = 2$; 6) $\log_x \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$.

190. Найти x из равенства: 1) $\log_3 x = -1$; 2) $\log_4 x = 2{,}5$; 3) $\log_5 x = 0$; 4) $\log_{49} x = -1{,}5$; 5) $\log_{\frac{1}{6}} x = 3$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$.

191. Вычислить: 1) $\log_2\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $\lg\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$.

192. Решить уравнение: 1) $\log_2 x = 3$; 2) $\log_{0,7} x = -1$; 3) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$; 4) $\log_5 (3-x) = 0$; 5) $\log_{0,4} (6 - 7x) = 1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} (5x-7) = -3$.

Найти значение выражения:

A

193. 1) $2^{\log_2 10}$; 2) $5^{\log_5 7}$; 3) $1{,}3^{\log_{1,3} 5}$; 4) $1 + 7^{\log_7 2}$; 5) $4^{-\log_4 7}$; 6) $4^{3\log_4 2}$.

Б

194. 1) $1{,}7^{\log_{1,7} 5}$; 2) $\pi^{\log_\pi 7{,}4}$; 3) $5^{\log_5 10 - 1}$; 4) $2^{3\log_2 4}$;
5) $2{,}4^{\log_{2,4} 10 + 1}$; 6) $10^{-\lg 0{,}8}$.

В

195. 1) $10^{\lg 0{,}3}$; 2) $10^{2\lg 3}$; 3) $10^{\lg 3 - \lg 2}$; 4) $81^{0{,}5\log_9 7}$.

196. Сравнить выражения: 1) $3^{\log_3 4}$ и $5^{\log_4 4}$;
2) $4^{\log_5 7}$ и $7^{\log_5 4}$; 3) $3^{\log_2 5}$ и $5^{\log_2 3}$.

197. Вычислить: 1) $2^{\log_2 5 + \log_2 4}$; 2) $4 \cdot 5^{1 - \log_5 25}$.

198. Доказать тождество $m^{\log_m N} = n^{\log_n N}$.

Прологарифмировать выражение:

А

199. 1) $y = \dfrac{ab^3}{c^2}$; 2) $z = \dfrac{\sqrt[5]{a}}{bc^2}$; 3) $y = a^2\sqrt[3]{b}$; 4) $x = \dfrac{a^3\sqrt{bc}}{(a+b)^2}$.

Б

200. 1) $x = \dfrac{a^2\sqrt{bc}}{3\sqrt[5]{(a+b)^3}}$; 2) $y = \dfrac{2\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{b}}$; 3) $x = 0{,}6^{\sqrt[3]{1{,}2}}$;

4) $z = \sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{b^2}$.

В

201. 1) $x = 3a\sqrt[5]{a^3(a+b)^2}$; 2) $x = \sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{ab}}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$; 3) $x = (\sqrt[4]{a^3b})^2$;

4) $x = \left(\dfrac{a^{10}}{\sqrt[6]{a^5}}\right)^{-0,2}$; 5) $x = \dfrac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}$.

Найти значение выражения:

А

202. 1) $\log_{12} 5 + \log_{12} 4$; 2) $\log_5 15 - \log_5 3$.

203. $\dfrac{\lg 64 - \lg 4}{\lg 48 - \lg 12}$.

204. 1) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$; 2) $\dfrac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$.

205. Что больше: 1) $\log_2 9 + \log_2 7$ или $\log_2 (9 + 7)$;
2) $\log_{0,6} 1,3 + \log_{0,6} 1,2$ или $\log_{0,6} (1,3 + 1,2)$?

Пропотенцировать выражение:

206. 1) $\lg x = \lg 7 + 3\lg a - \lg 5$; 2) $\log_3 y = \log_3 1,5 + \log_3 8$;
3) $\lg y = \frac{1}{2}\lg (a + b) - 2\lg a - 3\lg b$;
4) $\lg z = \lg 2 - \lg 3 + \lg (a + b) - \lg a$.

207. 1) $\lg x = \frac{1}{2}\lg (a - b) - \frac{2}{3}\lg (a + b) - \frac{2}{3}\lg a$;
2) $\lg y = \lg 2 + \lg a + 3\lg b - \lg 3 - \frac{1}{4}\lg (b - a)$.

208. 1) $\lg x = \frac{1}{2}\lg (a^2 + b^2) + \frac{1}{3}\lg (a + b) - \lg (a - b)$;

2) $\lg x = -\frac{1}{2}\lg a + \frac{1}{4}\left(\lg b - \frac{2}{3}\lg a + \frac{2}{3}\lg (a - b) - \frac{1}{2}\lg (a - b)\right)$.

209. Найти x, если: 1) $\log_{0,3} x = 2\log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12$;
2) $\log_\pi x = 3\log_\pi 4 - 2\log_\pi 6$.

210. Вычислить, не пользуясь вспомогательными средствами: 1) $\log_{\sqrt{5}} 2 + \log_5 6,25$; 2) $\log_{\sqrt{3}} 25 - \log_3 7\frac{58}{81}$.

211. Вычислить значение: 1) e^2; 2) $\frac{1}{e}$; 3) $\sqrt{e}$; 4) e^3; 5) $\ln e^3$;
6) $\ln 20$; 7) $\ln 3$; 8) $\ln 7,5$; 9) $\ln 1,21$.

Логарифмическая функция, ее график и свойства

Понятие логарифмической функции. Найдем формулу функции, обратной показательной функции $y = a^x$, по алгоритму нахождения формулы функции, обратной данной (см. с. 99).

1. Функция $y = a^x$ возрастающая при $a > 1$ и убывающая при $0 < a < 1$. По достаточному условию существования обратной функции к данной функция $y = a^x$ имеет обратную на области определения $D(f) = \boldsymbol{R}$ (соответственно область значений данной функции $E(f) = (0; +\infty)$).

2. Решим уравнение $y = a^x$ с двумя неизвестными относительно x. По определению логарифма, имеем $x = \log_a y = \varphi(y)$. Получили формулу функции, обратной функции $y = a^x = f(x)$.

3. Поменяем обозначения аргумента и функции в формуле обратной функции. Получим $y = \log_a x = \varphi(x)$ — формула функции, обратной функции $y = a^x$ в принятых обозначениях. Полученная обратная функция получила название **логарифмической функции**.

$y = \log_a x$

$a > 0 \quad a \neq 1$ $\qquad y = a^x$

Известно, что область определения и область значений взаимно обратных функций меняются множествами. Поэтому $D(\varphi) = (0; +\infty)$, $E(\varphi) = \boldsymbol{R}$.

Выше было показано, что график функции φ, обратной функции f, симметричен графику функции f относительно прямой $y = x$. Воспользуемся этим для построения графика функции $y = \log_a x$.

График функции $y = \log_a x$ можно получить из графика

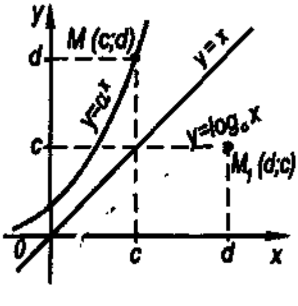

Рис. 97

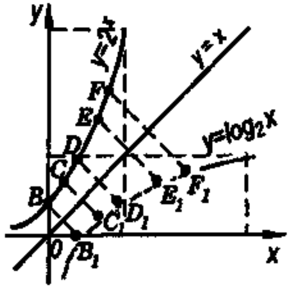

Рис. 98

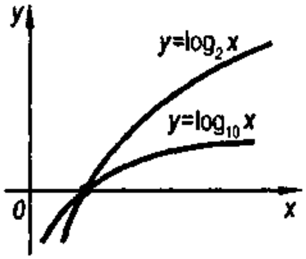

Рис. 99

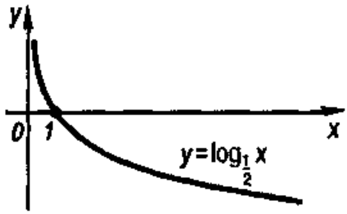

Рис. 100

функции $y = a^x$, симметрично отобразив последний относительно прямой $y = x$. Для этого достаточно для каждой точки $M(c; d)$ графика $y = a^x$ (рис. 97) построить точку $M_1(d; c)$, симметричную точке $M(c; d)$ относительно прямой $y = x$.

Если на листе бумаги начертить чернилами график функции $y = a^x$, а потом, не давая им высохнуть, быстро согнуть лист вдоль биссектрисы первого и третьего координатных углов, то отпечаток будет графиком логарифмической функции $y = \log_a x$. Построим, например, график функции $y = \log_2 x$. Для этого найдем точки, симметричные точкам графика функции $y = 2^x$ относительно прямой $y = x$ (рис. 98). Такой вид имеет график логарифмической функции при любом основании $a > 1$. Причем кривая тем плотнее прилегает к оси Ox, чем больше a (рис. 99). Если основание $0 < a < 1$, то график имеет другой вид. На рисунке 100 изображен график логарифмической функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Такой же общий вид будет иметь график логарифмической функции $y = \log_a x$ при любом основании $0 < a < 1$, причем кривая тем плотнее прилегает к оси Ox, чем меньше a (рис. 101).

Свойства логарифмической функции. Зная свойства взаимно обратных функций, можно легко получить свойства логарифмической функции из показательной. Вид графика пока-

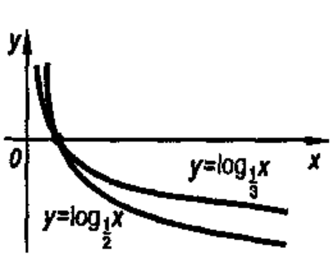

Рис. 101

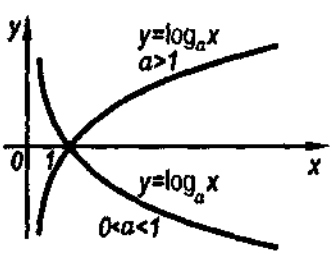

Рис. 102

зательной функции при основании a зависит от того, будет ли $a > 1$ или $0 < a < 1$. Поэтому и вид графика логарифмической функции при основании a зависит от тех же условий. Таким образом, для функции $y = \log_a x$ следует различать два случая: $a > 1$ и $0 < a < 1$ (рис. 102). В каждом из них свойства логарифмической функции следуют из свойств показательной, если учитывать еще связь между графиками показательной и логарифмической функций (см. табл. 8). Таким образом, имеем следующие **свойства логарифмической функции**.

1) Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел.

2) Область значений логарифмической функции — множество всех действительных чисел.

3) Логарифмическая функция на всей области определения R_+ возрастает, если $a > 1$, и убывает, если $0 < a < 1$.

4) Для любого $a > 0$ $(a \neq 1)$ выполняются равенства:

а) $\log_a 1 = 0$; б) $\log_a a = 1$;

в) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, если $x > 0$, $y > 0$;

г) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, если $x > 0$, $y > 0$;

д) для любого числа $x > 0$ и любого $p \in R$

$$\log_a x^p = p\log_a x.$$

Для сравнения свойства показательной и логарифмической функций выпишем в виде таблицы (табл. 8).

Таблица 8

Свойство	Функция	
	$y = a^x$	$y = \log_a x$
Область определения	R	$(0;\infty)$
Область значений	$(0;\infty)$	R
Монотонность $a > 1$	Возрастает	Возрастает
$0 < a < 1$	Убывает	Убывает

Систематизируем свойства логарифмов, которые следует запомнить, чтобы уверенно использовать их при решении разнообразных упражнений, выполнении практических расчетов.

Общие свойства для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$:

любое положительное число имеет логарифм, причем только один;

отрицательные числа и число 0 не имеют логарифмов;

логарифм единицы равен нулю;

логарифм основания равен единице.

Свойства логарифмов чисел при основании $a > 1$:

если $N_1 > N_2$, то и $\log_a N_1 > \log_a N_2$, т. е. большее число имеет больший логарифм;

логарифмы чисел, больших 1, положительны; логарифмы чисел, меньших 1, отрицательны;

если число возрастает неограниченно, то и логарифм возрастает неограниченно;

если число, оставаясь положительным, стремится к нулю, то его логарифм становится отрицательным и как угодно большим по модулю.

Свойства логарифмов чисел при основании $0 < a < 1$:

если $N_1 > N_2$, то $\log_a N_1 < \log_a N_2$, т. е. большее число имеет меньший логарифм;

логарифмы чисел, больших 1, отрицательны; логарифмы чисел, меньших 1, положительны;

если число возрастает неограниченно, то его логарифм убывает неограниченно (условная запись: $\log_a \infty = -\infty$);

если число, оставаясь положительным, стремится к нулю, то его логарифм неограниченно возрастает (условная запись: $\log_a 0 = +\infty$).

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

1. Какие значения аргумента x являются допустимыми для функции $y = \log_a (3 - x)$?

Решение. Поскольку логарифмическая функция имеет действительные значения только при положительных значениях аргумента, то должно выполняться условие $3 - x > 0$, отсюда $x < 3$. Таким образом, допустимые значения аргумента определяются неравенством $x < 3$.

Рассматривая следующие упражнения, проверяйте все утверждения по графикам логарифмической функции.

2. Какой вывод можно сделать относительно положительных чисел m и n, если $\log_5 m < \log_5 n$?

Решение. $m < n$, т. к. при основании, большем 1 ($a = 5$), меньшему логарифму соответствует меньшее число.

3. Какой вывод можно сделать относительно положительного числа m, если $\log_4 m = -3{,}7$?

Решение. $0 < m < 1$, т. к. при основании, большем 1 ($a = 4$), отрицательными являются логарифмы чисел, меньшие 1.

4. Какой вывод можно сделать относительно положительных чисел m и n, если $\log_{\frac{2}{5}} m > \log_{\frac{2}{5}} n$?

Решение. $m < n$, т. к. при основании, меньшем 1 $\left(a = \frac{2}{5}\right)$, меньшему логарифму соответствует большее число.

5. Какой вывод можно сделать относительно положительного числа c, если $\log_{\frac{1}{4}} c = -2$?

Решение. $c > 1$, т. к. при основании, меньшем 1 $\left(a = \frac{1}{4}\right)$, логарифмы чисел, больших 1, отрицательны.

6. Какой вывод можно сделать относительно основания логарифма a, если $\log_a 8 = 0{,}3$?

Решение. Если число, большее 1, имеет положительный логарифм, то основание логарифма больше 1. Таким образом, $a > 1$.

7. Какой вывод можно сделать относительно основания логарифма a, если $\log_a 7 < \log_a 6$?

Решение. Если большему числу соответствует меньший логарифм, то основание логарифма меньше 1. Таким образом, $0 < a < 1$.

8. Используя свойства логарифмической функции, определить, что больше:

а) $\log_2 3$ или $\log_2 5$? б) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ или $\log_{\frac{1}{2}} 3$? в) $\log_5 8$ или $\log_6 8$?

г) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ или $\log_{\frac{1}{2}} 5$? д) $\log_4 5$ или $\log_5 4$? е) $\log_2 1$ или $\log_5 1$?

ж) $\log_3 3$ или $\log_7 7$?

Решение.

а) $\log_2 5 > \log_2 3$, т. к. $a > 1$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 5$, т. к. $a < 1$;

в) $\log_6 8 < \log_5 8$, т. к. $x > 1$, график функции $y = \log_6 x$ лежит ниже графика функции $y = \log_5 x$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 5$, т. к. график функции $y = \log_{\frac{1}{3}} 5$ менее удален от оси Ox, чем график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} 5$;

д) $\log_4 5 > \log_5 4$, т. к. при $x > 1$ все точки графика $y = \log_4 x$ более удалены от оси Ox, чем точки графика функции $y = \log_5 x$;

е) $\log_2 1 = \log_5 1 = 0$, т. к. логарифм 1 при любом основании равен нулю;

ж) $\log_3 3 = \log_7 7 = 1$, т. к. логарифм основания равен единице.

9. Найти область определения функции:

а) $y = \log_2 (5 - x)$; б) $y = \log_3 (x^2 + 1)$;

в) $y = \log_{\frac{1}{2}} (5x - x^2 - 6)$; г) $y = \log_5 \frac{3+x}{x-5}$.

Решение. Поскольку выражение, находящееся под знаком логарифма, должно быть положительным, то для нахождения областей определения данных функций достаточно найти значения x, при которых выражение, находящееся под знаком логарифма, положительно.

а) $5-x>0$; $x<5$, т. е. областью определения функции $y=\log_2(5-x)$ является интервал $(-\infty; 5)$;

б) $x^2+1>0$. Неравенство выполняется для любых действительных значений x, поэтому область определения данной функции — интервал $(-\infty; +\infty)$;

в) $5x-x^2-6>0$, или $(x-2)(x-3)<0$, отсюда $2<x<3$, т. е. область определения — интервал $(2; 3)$;

г) $\frac{3+x}{x-5}>0$, или $(3+x)(x-5)>0$, отсюда $-\infty<x<-3$; $5<x<\infty$. Таким образом, область определения данной функции — интервалы $(-\infty; -3)$ и $(5; +\infty)$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Как называется функция, обратная показательной?

2. Какая показательная функция является обратной логарифмической функции $y=\log_a x$?

3. Дана экспонента — график показательной функции $y=a^x$. Как построить график обратной ей логарифмической функции $y=\log_a x$?

4. Почему функция $y=\log_a x$ $(a>1)$ существует только в области положительных чисел?

5. Чему равен $\log_3(-27)$?

6. Может ли логарифм положительного числа при основании $a>1$ быть отрицательным?

7. Указать любое число, логарифм которого при основании $a=9$ больше $\log_a 15$.

УПРАЖНЕНИЯ

А

212. Какой вывод можно сделать относительно положительных чисел m и n, если: 1) $\log_5 m<\log_5 n$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} m>\log_{\frac{1}{2}} n$; 3) $\log_{0,1} m<\log_{0,1} n$?

213. Какой вывод можно сделать о числе $m>0$, если: 1) $\log_2 m=-0{,}32$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} m=\frac{5}{3}$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} m=-3\frac{2}{5}$?

214. Какой вывод можно сделать относительно основания логарифма a, если: 1) $\log_a 7=0{,}4$; 2) $\log_a 5=-\frac{1}{4}$; 3) $\log_a 4<\log_a 2$; 4) $\log_a \frac{2}{5}>\log_a \frac{2}{3}$?

Б

215. По свойствам логарифмической функции определить, какое из чисел больше:

1) $\log_2 5$ или $\log_2 8$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 6$ или $\log_{\frac{1}{3}} 8$;

3) $\log_7 8$ или $\log_5 8$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} 11$ или $\log_{\frac{1}{3}} 11$.

216. Для каких значений x правильно равенство:

1) $\lg (x^2 + 5x - 14) = \lg (x + 7) + \lg (x - 2)$;

2) $\lg (x^2 - 10x + 25) = 2\lg (5 - x)$?

217. Определить знак произведения

$\log_3 0{,}97 \log_2 0{,}98 \log_4 6{,}99$.

В

218. Доказать, что $\log_3 0{,}71 \log_2 \frac{4}{11} \log_{\sqrt{5}} 0{,}95 < 0$.

219. Каким соотношением связаны числа M и N, если известно, что $\lg M = 1{,}4153$, а $\lg N = 3{,}4153$?

Найти область определения функции:

А

220. 1) $y = \log_2 (2 + x)$; 2) $y = \log_3 (x^2 + 3)$; 3) $\log_5 (4 - x^2)$; 4) $y = \log_4 (x^2 + x + 1)$; 5) $y = \log_2 \frac{5x - 2}{3 - x}$.

Б

221. 1) $\log_{0,1} (x^2 - 4)$; 2) $\log_{\sqrt{10}} (6 + x - x^2)$; 3) $\log_8 \frac{2 - x}{x + 1}$; 4) $\log_{0,9} \frac{2 + 3x}{5 - 2x}$.

В

222. 1) $y = \log_3 (3x^2 - 7x - 40)$; 2) $y = \log_{\sqrt{2}} (x^2 - 2x - 3)$;

3) $y = \log_7 \frac{2x + 5}{x - 1}$; 4) $y = \log_{3,1} \frac{7 - 2x}{2 - 3x}$; 5) $y = \log_2 |x|$; 6) $y = \log_{0,5} |x|$.

223. Для функций, рассматриваемых в указанных промежутках, определить: 1) при каких значениях x значение $y < 0$;

$y = 0$; $y > 0$? 2) от какого наименьшего (наибольшего) и к какому наибольшему (наименьшему) значению изменяется y?

1) $y = \log_3 (x-1)$, если $\frac{10}{9} \le x \le 10$;

2) $y = \log_{0,5} (x + 1)$, если $-0{,}75 \le x \le 7$;

3) $y = \log_4 (x-2)$, если $0{,}25 \le x \le 64$;

4) $y = 3 - \log_5 x$, если $0 < x \le 625$.

Изобразить схематически график функции:

224. 1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

225. 1) $y = \log_3 x$; 2) $y = \log_{\sqrt{5}} x$; 3) $y = \log_{0,3} x$; 4) $y = \log_{\sqrt{0,7}} x$.

226. 1) $y = \ln x$; 2) $y = \ln \frac{1}{x}$; 3) $y = \ln (-x)$; 4) $y = \ln |x|$.

227. Построить график функции:

1) $y = \lg (-x)$; 2) $y = |\log_2 x|$; 3) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x - 2) + 1$;

4) $y = \lg (2 - x)$; 5) $y = |\log_2 x - 1|$; 6) $y = \log_{\frac{1}{2}} |x| - 2$;

7) $y = \lg |x - 1|$; 8) $y = \log_{\frac{1}{2}} (1 - 2x)$; 9) $y = \log_2 \log_2 x$.

Решение логарифмических уравнений и неравенств

Логарифмические уравнения. Примеры решений логарифмических уравнений.

Например: $\log_5 x = 2$, $\lg x + \lg 5 = 2$, $\lg (3x^2 + 7) - \lg (3x - 2) = 1$. Уравнение $x + \log_2 7 = \sqrt{\log_4 5}$ не логарифмическое, т. к. оно не содержит неизвестное под знаком логарифма. Наиболее простое логарифмическое уравнение имеет вид $\log_a x = b$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, b — любое число. Это уравнение имеет единственное решение $x = a^b$, которое можно найти с помощью потенцирования.

Рассмотрим логарифмические уравнения вида:

$$\log_a f(x) = \log_a \varphi(x) \quad (a > 0,\ a \neq 1). \tag{1}$$

Решение этих уравнений основывается на том, что уравнение $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) = \varphi(x). \end{cases} \tag{2}$$

Другими словами, уравнение $\log_a f(x) = \log_a \varphi (x)$ равносильно каждой из смешанных систем:

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Чтобы решить уравнение (1), достаточно решить уравнение

$$f(x) = \varphi (x) \tag{4}$$

и его корни подставить в систему неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \end{cases} \tag{5}$$

которая задает область определения уравнения. Корнями уравнения (1) являются только те решения уравнения (4), которые удовлетворяют систему (5), т. е. принадлежат области определения уравнения, заданного формулой (1).

При решении логарифмических уравнений может произойти расширение области определения (появляются посторонние корни) или ее сужение (потеря корней). Поэтому нужно обязательно подставить корни уравнения (4) в систему (5).

Например, уравнение $\lg x^2 = 2$ имеет два корня, т. к., по определению логарифма, $x^2 = 10^2$, $x^2 = 100$, отсюда $x_1 = 10$; $x_2 = -10$. Если сначала вынести показатель 2 за знак логарифма, то $2\lg x = 2$, $\lg x = 1$, $x = 10$. Потеря второго решения $x = -10$ произошла вследствие сужения множества допустимых значений x после вынесения показателя за знак логарифма. Действительно, в уравнении $\lg x^2 = 2$ корень x может быть положительным и отрицательным числом, а в уравнении $2\lg x = 2$ — только положительным.

Наоборот, если бы исходным было уравнение $2\lg x = 2$, а от него мы перешли бы к уравнению $\lg x^2 = 2$, а затем к уравнению $x^2 = 100$, отсюда $x_1 = 10$, $x_2 = -10$, то получили бы постороннее решение ($x_2 = -10$) для данного уравнения.

Вообще не существует общего метода решения логарифмических уравнений. Чаще всего оно сводится к решению алгебраических уравнений и простейших логарифмических уравнений вида $\log_a x = b$.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

Решить уравнение:

1. $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$.

Р е ш е н и е. По определению логарифма, имеем:

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $x = 8$.

2. $5\log_2 x - 3\log_7 49 = 2\log_2 x$.

Р е ш е н и е. $5\log_2 x - 2\log_2 x = 3 \cdot 2$; $3\log_2 x = 6$; $\log_2 x = 2$, $x = 4$.

П р о в е р к а. $5\log_2 4 - 3\log_7 49 = 10 - 6 = 4$; $2\log_2 4 = 4$. Таким образом, $x = 4$.

3. $\log_5 x + \log_5 (x + 7) = \log_5 2 + 2\log_5 3$.

Р е ш е н и е. Пропотенцируем обе части уравнения:

$$x(x + 7) = 2 \cdot 3^2.$$

Отсюда $x^2 + 7x - 18 = 0$, $x_1 = -9$, $x_2 = 2$.

П р о в е р к а. Подставим в данное уравнение вместо неизвестного число -9. В левой части получим выражения $\log_5(-9)$ и $\log_5(-2)$, не имеющие смысла (логарифмы отрицательных чисел не существуют). Таким образом, число $x = -9$ является посторонним корнем. Теперь проверим, является ли корнем данного уравнения число 2. Левая часть уравнения имеет вид:

$$\log_5 2 + \log_5 9 = \log_5 2 + \log_5 3^2 = \log_5 2 + 2\log_5 3.$$

Левая часть равна правой. Таким образом, $x = 2$ — корень данного уравнения.

Заметим, что способ потенцирования широко применяется при решении логарифмических уравнений.

4. $\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3$.

Р е ш е н и е. $x^2 + 4x + 3 = 2^3$, или $x^2 + 4x - 5 = 0$. Корнями этого уравнения являются: $x_1 = -5$, $x_2 = 1$. Проверка показывает, что оба решения удовлетворяют данное уравнение. (Проверку сделайте самостоятельно.)

5. $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) - 1 + \log_7(2x - 7) = 0$.

Р е ш е н и е. Перенесем два последних слагаемых в правую часть уравнения: $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = 1 - \log_7(2x - 7)$. Учитывая, что $1 = \log_7 7$, имеем: $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = \log_7 7 - \log_7(2x - 7)$. Теперь пропотенцируем обе части уравнения: $\frac{x-2}{x+2} = \frac{7}{2x-7}$. После преобразований получим квадратное уравнение $x^2 - 9x = 0$, имеющее корни $x_1 = 0$, $x_2 = 9$.

П р о в е р к а. $x = 0$ — посторонний корень, т. к. выражения $\log_7(0 - 2)$ и $\log_7(0 - 7)$ не имеют смысла. Подставим в уравнение значение $x = 9$. Левая часть имеет вид: $\log_7 7 - \log_7 11 - 1 + \log_7 11 = 1 - \log_7 11 - 1 + \log_7 11 = 0$. Правая часть также равна нулю. Таким образом, $x = 9$ — корень данного уравнения.

6. $\log_x(x^2 - 2x + 2) = 1$.

Р е ш е н и е. $x^2 - 2x + 2 = x$, или $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Проверка показывает, что $x = 1$ не может быть корнем данного уравнения, а число 2 — его корень.

7. $\log_{1-2x}(x^2 - 3x + 5) = 2$.

Р е ш е н и е. По определению логарифма, получаем квадратное уравнение: $(1 - 2x)^2 = x^2 - 3x + 5$. Его корни $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{3}$. Данное уравнение удовлетворяет лишь значение $x = -1$ (проверьте это).

8. $\log_4^2 x - \log_4 x - 2 = 0$.

Р е ш е н и е. Пусть $\log_4 x = y$, тогда получим квадратное уравнение $y^2 - y - 2 = 0$, корни которого $y_1 = -1$, $y = 2$. Получим два уравнения: $\log_4 x = -1$, $\log_4 x = 2$.

Из первого уравнения, по определению логарифма, находим $x_1 = 4^{-1}$, $x_1 = \frac{1}{4}$. Из второго уравнения имеем: $x_2 = 4^2$, $x_2 = 16$. Проверка показывает, что оба найденных значения x — корни данного уравнения. (Проверку сделайте самостоятельно.)

9. $\lg x = 2 - \lg 5$.

Р е ш е н и е. Заменим 2 на $\lg 100$. Получим $\lg x = \lg 100 - \lg 5$, или $\lg x = \lg 20$, отсюда $x = 20$. Здесь применяется свойство логарифмов: если логарифмы двух чисел при одном и том же основании равны, то и сами числа равны.

П р о в е р к а. $2 - \lg 5 = \lg 100 - \lg 5 = \lg \frac{100}{5} = \lg 20$; $\lg 20 = \lg 20$.

10. $\lg x + \lg (x + 21) = 2$.

Р е ш е н и е. $\lg x + \lg (x + 2) = \lg 100$; $x(x + 21) = 100$; $x^2 + 21x - 100 = 0$; $x_1 = -25$, $x_2 = 4$.

П р о в е р к а. Если $x = -25$, то в левой части данного уравнения имеем выражения $\lg (-25)$ и $\lg (-4)$, не имеющие смысла. Таким образом, $x_1 = -25$ не является решением данного уравнения. При $x_1 = 4$ имеем: $\lg 4 + \lg 25 = \lg (4 \cdot 25) = \lg 100 = 2$. Таким образом, $x = 4$ — корень данного уравнения.

11. $\lg^3 (x + 1) + \lg^2 (x + 1) - 2 \lg (x + 1) = 0$.

Р е ш е н и е. Пусть $\lg (x + 1) = y$, тогда $y^3 + y^2 - 2y = 0$, или $y(y^2 + y - 2) = 0$, откуда получаем два уравнения: $y = 0$; $y^2 + y - 2 = 0$.

Решая эти уравнения, находим: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -2$. Тогда: 1) $\lg (x + 1) = 0$; 2) $\lg (x + 1) = 1$; 3) $\lg (x + 1) = -2$, соответственно: 1) $x + 1 = 1$; 2) $x + 1 = 10$; 3) $x + 1 = 0{,}01$. Отсюда находим $x_1 = 0$, $x_2 = 9$, $x_3 = -0{,}99$. Проверка показывает, что все три найденных значения x являются корнями данного уравнения.

12. $\lg (2x^2 + 21x + 9) - \lg (2x + 1) = 1$.

Р е ш е н и е. $\lg \frac{2x^2 + 21x + 9}{2x + 1} = \lg 10$. Из равенства логарифмов следует равенство чисел: $\frac{2x^2 + 21x + 9}{2x + 1} = 10$. Отсюда $2x^2 + x - 1 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Значение $x_1 = -1$ не удовлетворяет уравнение, т. к. под знаком логарифма получаем отрицательное число.

Покажем еще применение способа логарифмирования обеих частей уравнения.

13. $x^{\lg x - 1} = 100$.

Р е ш е н и е. $(\lg x - 1) \lg x = 2$. Положив $\lg x = y$, имеем: $y^2 - y - 2 = 0$. Отсюда $y_1 = -1$; $y_2 = 2$. Тогда $\lg x_1 = -1$ и $x_1 = \frac{1}{10}$; $\lg x_2 = 2$ и $x_2 = 100$. Оба значения неизвестного удовлетворяют уравнение.

14. $x^{1 - \lg x} = 0{,}01$.

Р е ш е н и е. Прологарифмируем обе части уравнения: $(1 - \lg x) \lg x = -2$. Пусть $\lg x = y$, тогда $(1 - y)\, y = -2$, или $y^2 - y - 2 = 0$. Найдем корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = 2$. Получим два уравнения: $\lg x = -1$, $\lg x = 2$. Отсюда: $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 100$. Оба значения неизвестного являются корнями данного уравнения.

Заметим, что в примерах 13, 14 неизвестное входило в показатель степени под знаком логарифма. Такие уравнения иногда называют **показательно-логарифмическими.**

Чаще всего показательно-логарифмические уравнения решают способом логарифмирования обеих частей уравнения. К отдельным видам уравнений удобно применять способ приведения к общему основанию.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

Решить уравнение способом приведения к общему основанию:

1. $x^{\lg x} = 10.$

Решение. Прологарифмировав обе части уравнения, получим: $\lg x \lg x = \lg 10$, $\lg^2 x = 1$, отсюда $\lg x_1 = 1$, $\lg x_2 = -1$, или $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$.

Проверка. Если $x_1 = 10$, имеем $10^{\lg 10} = 10$, $10 = 10$. Если $x_2 = 0{,}1$, имеем $0{,}1^{\lg 0{,}1} = 0{,}1^{-1} = 10$. Таким образом, $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$.

2. $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = \frac{1}{64}$.

Решение. Приведем обе части уравнения к общему основанию 2. Получим: $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = 2^{-6}$. Приравнивая показатели степеней, имеем: $\frac{3}{\log_3 x} = -6$, или $\log_3 x = -\frac{1}{2}$. Отсюда $x = 3^{-\frac{1}{2}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, или $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Проверка. $2^{\frac{3}{\log_3 \frac{\sqrt{3}}{3}}} = 2^{\frac{3}{-\frac{1}{2}}} = 2^{-6}$, $2^{-6} = 2^{-6}$. Таким образом, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $x^{2 - \frac{\lg x}{2}} = 100.$

Решение. Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 10, получим: $\left(2 - \frac{\lg x}{2}\right) \lg x = \lg 100$, или $\lg^2 x - 4 \lg x + 4 = 0$, $(\lg x - 2)^2 = 0$. Отсюда $\lg x = 2$, $x = 100$.

Проверка. $100^{2 - \frac{\lg 100}{2}} = 100^{2-1} = 100$. Следовательно, $x = 100$.

4. $0{,}4^{\lg^2 x + 1} = 6{,}25^{2 - \lg x^3}$.

9*

Р е ш е н и е. Приведем обе части уравнения к общему основанию $\frac{5}{2}$. Получим: $\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x+1} = 2{,}5^{2(2-3\lg x)}$,

$\left(\frac{5}{2}\right)^{-(\lg^2 x+1)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2(2-3\lg x)}$. Приравнивая показатели степеней, получим: $-(\lg^2 x + 1) = 2(2 - 3\lg x)$, или $\lg^2 x - 6\lg x + 5 = 0$.

Решим квадратное уравнение относительно $\lg x$. Имеем: $\lg x_1 = 1$, или $x_1 = 10$; $\lg x_2 = 5$, или $x_2 = 100\,000$. Проверка показывает, что оба значения x — корни данного уравнения.

5. $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$.

Р е ш е н и е. Запишем данное уравнение следующим образом:

$$\log_2(\log_3 \log_4 x) = 0.$$

Число, находящееся в скобках, по определению логарифма, равно 2^0, т. е. 1. Следовательно, $\log_3 \log_4 x = 1$. Это уравнение перепишем так: $\log_3 (\log_4 x) = 1$. Число, находящееся в скобках, по определению логарифма, равно 3. Имеем: $\log_4 x = 3$, отсюда $x = 4^3$, или $x = 64$.

П р о в е р к а. $\log_2 \log_3 \log_4 64 = \log_2 \log_3 3 = \log_2 1 = 0$; $0 = 0$.

6. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ и перейдем во всех слагаемых к логарифму при основании 2.

$\log_{16} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 16} = \frac{\log_2 x}{4}$, $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$. Исходное уравнение примет вид: $\frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 7$. Отсюда $\log_2 x = 4$. Окончательно имеем $x = 16$.

Некоторые логарифмические уравнения можно решить лишь приближенно. Одним из таких способов приближенного нахождения корней является графический. На рисунках 103, 104, соответственно, приведены графические решения уравнений $\lg x - \log_{\frac{1}{2}} x + 1 = 0$ и $\lg(x + 1) - \log_2 x = 0$.

Решение систем логарифмических уравнений. При решении систем логарифмических уравнений чаще всего применяются те же способы, что и при решении систем алгебраических уравнений.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

Решить систему уравнений:

1. $\begin{cases} \lg x + \lg y = 5, \\ \lg x - \lg y = 3. \end{cases}$

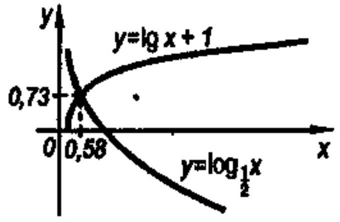

Рис. 103

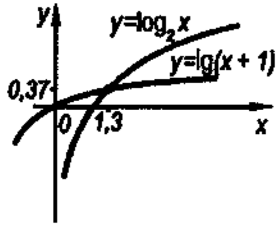

Рис. 104

Р е ш е н и е. $2\lg x = 8$, $\lg x = 4$, $x = 10\,000$; $\lg y = 1$, $y = 10$.

2. $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Первое уравнение системы равносильно уравнению $x^2 + y^2 = 100$, а второе — уравнению $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$, причем $x > 0$ и $y > 0$.

Имеем систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ xy = 48. \end{cases}$ Решая эту систему при $x > 0$, $y > 0$, получим решение $x = 8$, $y = 6$, или (8; 6).

3. $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \dfrac{1}{3}\log_2 x \log_2 (1+y)^2 = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Применяя свойства логарифма, преобразуем уравнение данной системы:

$$\begin{cases} 2\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 (y+1) - 1 = 2, \\ \frac{1}{3}\log_2 x \cdot 2\log_2 (1+y) = \frac{4}{3}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\log_2 x + \log_2 (y+1) = 6, \\ \log_2 x \cdot \log_2 (1+y) = 2. \end{cases}$$

Сделаем замену $\log_2 x = u$, $\log_2 (y+1) = v$, получим систему: $\begin{cases} 4u + v = 6, \\ uv = 2; \end{cases}$ $u = 1$, $v = 2$; или $u = \frac{1}{2}$, $v = 4$. Отсюда $\log_2 x = \frac{1}{2}$, $\log_2 (y+1) = 4$, или $\log_2 x = 1$, $\log_2 (y+1) = 2$. Таким образом, получили два решения: $x = 2$, $y = 3$ и $x = \sqrt{2}$, $y = 15$.

4. $\begin{cases} 8(\sqrt{2})^{x-y} = 0{,}5^{y-3}, \\ \log_3 (x-2y) + \log_3 (3x + 2y) = 3. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Множество допустимых значений неизвестных

x и y определяется системой неравенств: $x - 2y > 0$, $3x + 2y > 0$.

Перепишем первое уравнение системы в виде $(\sqrt{2})^{x-y+6} = (\sqrt{2})^{6-2y}$. Получаем уравнение $x - y + 6 = 6 - 2y$. Из второго уравнения системы, записанного в виде $\log_3((x-2y)(3x+2y)) = 3$, имеем уравнение $(x - 2y)(3x + 2y) = 27$.

Следовательно, решение исходной системы сведено к решению системы уравнений $\begin{cases} x-y+6=6-2y, \\ (x-2y)(3x+2y)=27, \end{cases}$ которая рассматривается на множестве допустимых значений неизвестных, заданных исходной системой.

Из первого уравнения системы находим $y = -x$. Подставляя это значение в второе уравнение системы, получаем $3x^2 = 27$. Отсюда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Из первого уравнения системы находим $y_1 = -3$, $y_2 = 3$. Данную систему удовлетворяет лишь пара $(3;-3)$.

5. $\begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \log_y x = 2. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Прологарифмируем первое уравнение системы при $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Имеем:

$$\lg y \lg x = 2. \tag{1}$$

Из второго уравнения системы имеем:

$$x = y^2. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) имеем: $\lg y \cdot \lg y^2 = 2$. Поскольку $y > 0$, то $2\lg^2 y = 2$, $\lg^2 y = 1$, $\lg y = \pm 1$, $y_1 = 0{,}1$, $y_2 = 10$, $x_1 = 0{,}01$, $x_2 = 100$.

Таким образом, решениями системы являются $(0{,}01;\ 0{,}1)$, $(100;\ 10)$.

6. $\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{4}, \\ \log_x y - \log_y x = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Перепишем второе уравнение системы при $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$ в таком виде: $\log_x y - \dfrac{1}{\log_x y} = \dfrac{3}{2}$, $\log_x y \neq 0$; $y \neq 1$. $2\log_x^2 y - 3\log_x y - 2 = 0$. Отсюда $\log_x y = -\dfrac{1}{2}$ и $\log_x y = 2$.

а) В уравнении $\log_x y = -\dfrac{1}{2}$ неизвестные x и y могут быть или $y > 1$, $0 < x < 1$, или $0 < y < 1$, $x > 1$. Ни одна из областей определения неизвестных не удовлетворяет уравнение $x + y = \dfrac{3}{4}$.

б) $\lg_x y = 2$, $y = x^2$. Решим уравнение $x + y = \dfrac{3}{4}$, учитывая, что $y = x^2$. Имеем: $x + x^2 = \frac{3}{4}$, $4x^2 + 4x - 3 = 0$; $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

$x_1 = -\frac{3}{2}$ не удовлетворяет второе уравнение исходной системы; $x_2 = \frac{1}{2}$, тогда $y_2 = \frac{1}{4}$.

Следовательно, решением системы является $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{4}$.

Логарифмические неравенства. При решении логарифмических неравенств вида

$$\log_a f(x) \gtrless \log_a \varphi(x) \qquad (1)$$

прежде всего учитываем, что областью определения логарифмической функции является множество положительных чисел, т. е. выражения, стоящие под знаком логарифма, считаются положительными.

Если $a > 1$, то логарифмическая функция возрастает. Поэтому большему логарифму отвечает и большее значение выражения, находящегося под знаком логарифма.

При $0 < a < 1$ большему логарифму отвечает меньшее значение выражения, находящегося под знаком логарифма.

При $a > 1$, неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \gtrless \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

При $0 < a < 1$ неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \lesseqgtr \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

Решить логарифмическое неравенство:

1. $\log_2 x < 3$. Имеем: $0 < x < 2^3$, $0 < x < 8$.
2. $\log_3 x > 4$. Имеем: $x > 3^4$, $x > 81$.
3. $\log_{\frac{1}{4}} x < 2$. Имеем: $x > \left(\frac{1}{4}\right)^2$, $x > \frac{1}{16}$.
4. $\log_{0,2} x > 5$. Имеем: $0 < x < 0{,}2^5$, $0 < x < 0{,}00032$.
5. $\log_{0,5} (2x + 3) > 0$. Имеем: $0 < 2x + 3 < 1$, отсюда $-1{,}5 < x < -1$.

6. $2 - \log_2(x^2+3x) > 0$. Имеем: $\log_2(x^2+3x) < 2$, отсюда $x^2+3x > 0$ и $x^2+3x < 4$. Таким образом, $-4 < x < -3$, $0 < x < 1$.

7. $\lg(2x^2+4x-5) < \lg(4+x)$.

Р е ш е н и е. Учитывая, что $a = 10 > 1$, имеем:

$$\begin{cases}2x^2+4x-5 < 4+x,\\ 2x^2+4x-5>0;\end{cases} \quad \begin{cases}2x^2+3x-9 < 0,\\ 2x^2+4x-5>0;\end{cases}$$

$2x+3x-9=0$, $x_1=-3$, $x_2=1{,}5$, $-3<x<1{,}5$;

$2x^2+4x-5=0$, $x_1=-1-\dfrac{\sqrt{14}}{2}$, $x_2=-1+\dfrac{\sqrt{14}}{2}$,

$-\infty < x < -1-\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ и $-1+\dfrac{\sqrt{14}}{2} < x < +\infty$.

Итак, надо решить систему неравенств

$$\begin{cases}-3 < x < 1{,}5,\\ -\infty < x < -1-\dfrac{\sqrt{14}}{2},\\ -1+\dfrac{\sqrt{14}}{2} < x < +\infty.\end{cases}$$

Решениями данной системы, а значит, и данного неравенства, являются:

$$-3 < x < -1-\frac{\sqrt{14}}{2} \text{ и } -1+\frac{\sqrt{14}}{2} < x < 1{,}5.$$

8. $\log_5 x + \log_5(x+1) < \log_5(2x+6)$.

Р е ш е н и е. Выражения, находящиеся под знаком логарифма в данном неравенстве, должны быть положительными. Следовательно, выполняются неравенства $x>0$; $x+1>0$; $2x+6>0$.

Запишем данное неравенство в виде $\log_5 x(x+1) < \log_5(2x+6)$. Здесь основание $a=5>1$, поэтому $x(x+1) < 2x+6$. Решение этого неравенства сводится к решению систем четырех неравенств:

$$\begin{cases}x>0,\\ x+1>0,\\ 2x+6>0,\\ x(x+1)<2x+6;\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x>0,\\ x>-1,\\ x>-3,\\ x^2-x-6<0;\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x>0,\\ x>-1,\\ x>-3,\\ -2<x<3.\end{cases}$$

Находим значения x, для которых выполняются указанные четыре неравенства.

Следовательно, $0 < x < 3$.

9. $\log_{\frac{1}{12}}(x^2-8x+12) > -1$.

Р е ш е н и е. Выражение, находящееся под знаком логарифма, должно быть положительным. Поэтому $x^2 - 8x + 12 > 0$. Запишем данное неравенство в виде $\log_{\frac{1}{12}}(x^2 - 8x + 12) > \log_{\frac{1}{12}} 12$. Поскольку $a = \frac{1}{12} < 1$, то $x^2 - 8x + 12 < 12$.

Остается решить систему двух неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 12 > 0, \\ x^2 - 8x + 12 < 12; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -\infty < x < 2,\ 6 < x < \infty, \\ 0 < x < 8. \end{cases}$$

Следовательно, $0 < x < 2$ и $6 < x < 8$.

10. $\log_3^2 x + 3\log_3 x + 2 < 0$.

Решение. Областью определения неизвестного является $x > 0$.

Обозначив $y = \log_3 x$, получаем: $y^2 + 3y + 2 < 0$. Отсюда $-2 < y < -1$, или $-2 < \log_3 x < -1$. Следовательно, $\frac{1}{9} < x < \frac{1}{3}$.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Изобретению логарифмов в значительной мере способствовали потребности в усовершенствовании вычислений. Изобрели логарифмы и почти одновременно начали их применять шотландский математик **Джон Непер** (1550—1617) и швейцарский математик, астроном и механик **Иост Бюрги** (1552—1632). Тем не менее первый шаг к упрощению вычислений сделал немецкий математик **Михаэль Штифель** (1487—1567), у которого понятие логарифма появилось в результате сопоставления геометрической и арифметической прогрессий. Эта идея берет свое начало в работах **Архимеда** (ок. 287—212 до н. э.).

Рассмотрим эту идею на таком примере. Составим таблицу (табл. 9).

Таблица 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096	8 192	16 384	32 768

В верхней строке имеем арифметическую прогрессию с разностью, которая равна 1, а в нижней строке — соответственно, геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Сопоставив числа в соответствующих колонках, замечаем, что в первой строке мы имеем логарифмы чисел второй строки при основании 2. Так, например, $\log_2 512 = 9$ (т. к. $2^9 = 512$), $\log_2 8192 = 13$ (т. к. $2^{13} = 8192$) и т. д.

Джон НЕПЕР
(1550—1617)

Пользуясь данными таблицы и теоремой о том, что логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей, можно значительно упростить нахождение произведений чисел, записанных в нижней строке таблицы.

Пусть необходимо, например, умножить 64 на 512. Найдем логарифм этого произведения при основании 2. Имеем $\log_2(64 \cdot 512) = \log_2 64 + \log_2 512$. По таблице находим $\log_2 64 = 6$, $\log_2 512 = 9$. Таким образом, $\log_2(64 \cdot 512) = 6 + 9 = 15$. Но числу 15 из первой строки соответствует число 32 768 из второй строки. Таким образом, $64 \cdot 512 = 32\ 768$.

Применяя теорему о логарифме частного (дроби), а можно воспользоваться таблицей и при делении чисел.

Например, необходимо разделить 8192 на 128. Найдем логарифм этого частного при основании 2. Имеем:

$$\log_2 \frac{8192}{128} = \log_2 8192 - \log_2 128 = 13 - 7 = 6\,.$$

Но числу 6 первой строки соответствует число 64 второй строки. Итак: $8192 : 128 = 64$.

Можно воспользоваться таблицей и для возведения чисел в степень. Например, вычислим 4^5. Имеем: $\log_2 4^5 = 5\log_2 4 = 5 \cdot 2 = 10$. Числу 10 первой строки таблицы соответствует число 1024 второй строки. Таким образом, $4^5 = 1024$.

Как видим, действия второй ступени (умножение, деление) свелись к действиям первой ступени (сложение, вычитание) над соответствующими логарифмами. При этом пришлось выполнять действия со значительно меньшими числами.

Для практического осуществления идеи Штифеля нужно было составить геометрическую прогрессию, которая возрастала бы очень медленно, т. к. лишь при этом она может охватывать значительное количество чисел. Бюрги взял знаменателем прогрессии число 1,0001 вместо 2, как было у Штифеля.

Позднее основанием таблиц начали называть тот член, которому в арифметической прогрессии соответствует число 1. У Бюрги основанием был 10 001-й член геометрической прогрессии, т. е. $1{,}0001^{10000}$, или $(1+10^{-4})^{10^4} \approx 2{,}71814593$ (в арифметической прогрессии ему соответствовало число $0{,}0001 \cdot 10^4 = 1$).

Бюрги пришел к логарифмам раньше, чем Непер, но опубликовал свои таблицы только в 1620 г. Таким образом, первой в 1614 г. появилась работа Непера «Описание удивительной таблицы логарифмов». Основанием таблицы логарифмов Непера является иррациональное число, к которому неограниченно приближаются числа вида $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченном возрастании n. Это число называют неперовым числом и со времен Леонарда Эйлера обозначают буквой e:

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Непер составил таблицы, взяв наиболее удобное приближение числа e, а именно $\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$. Неперу принадлежит и сам термин «логарифм».

Таблицы Непера усовершенствовал английский математик **Генри Бригс** (1561—1631). С согласия Непера, он упростил его систему логарифмов и составил в десятичной системе исчисления таблицу логарифмов всех целых чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000 с 14-тью десятичными знаками. Таблицы Бригса, опубликованные в 1624 г. и дополненные **А. Влакком** в 1629 г., позднее начали называть таблицами обычных логарифмов.

В связи с внедрением современных ЭВМ вычисления с помощью таблиц логарифмов утратили свое значение.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие уравнения называются логарифмическими?

2. Если вследствие определенных преобразований уравнения область определения неизвестного сузилась, то что произошло с корнями уравнения?

3. Какова причина появления посторонних корней при решении логарифмических уравнений?

4. Какие способы решения логарифмических уравнений вам известны?

5. В чем состоит способ потенцирования при решении логарифмических уравнений?

6. Какие уравнения называют показательно-логарифмическими?

7. Какие способы решения систем логарифмических уравнений вы знаете?

8. Какие свойства логарифмической функции используют при решении неравенств вида $\log_a f(x) \le \log_a \varphi(x)$?

9. Какой системе неравенств равносильно неравенство $\log_a f(x) \le \log_a \varphi(x)$ при: 1) $a > 1$, 2) $0 < a < 1$?

УПРАЖНЕНИЯ

Решить уравнение:

А

228. 1) $\log_2(5 - x) = 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(5x - 7) = -3$;

3) $\log_{0,3}(5 + 2x) = 1$; 4) $\lg(x - 1) = \lg(5x - 3)$;

5) $\log_3(x^2 - x + 1) = 0$; 6) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 10) = 2$;

7) $\log_a x = \log_a 3 + \log_a 5$; 8) $\log_5^2 x = 3\log_5 x$;

9) $\lg^2 x - 5\lg x + 6 = 0$; 10) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$;

11) $x^{\lg x} = 10\,000$; 12) $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{1 + \lg x}$;

13) $\lg\lg\lg x = 0$; 14) $x^{\lg x + 2} = 1\,000$.

Б

229. 1) $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 4) = -2$; 2) $\dfrac{\lg 2x}{\lg(4x - 15)} = 2$;

3) $\log_2(x + 3) = 3 - x$; 4) $\log_x 3 - \log_x 2 = \dfrac{1}{2}$;

5) $\log_a x = \log_a 12 - 2\log_a 2$;

6) $\lg(x + 6) - \dfrac{1}{2}\lg(2x - 3) = 2 - \lg 25$;

7) $\lg^4 x - 10\lg^2 x + 9 = 0$; 8) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$;

9) $\log_\pi(x^2 + 2x + 3) = \log_\pi 6$;

10) $2\log_6(2 + x) + \log_6(9 - 6x + x^2) = 2$;

11) $\dfrac{1}{2}\lg(x - 9) + \lg\sqrt{2x - 1} = 1$;

12) $\log_3 4 + \log_3 x = \log_3(x - 6) - \log_3(3 - x)$;

13) $x^{\lg x - 3} = 0,01$; 14) $3^{2 - \log_3 x} = 81x$;

15) $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}$; 16) $100^{\lg(x + 20)} = 10\,000$.

В

230. 1) $\log_3(x^2-3x-5)=\log_3(7-2x)$;

2) $\lg(x^2+75)=2+\lg(x-4)$;

3) $\dfrac{1}{\lg x-6}+\dfrac{5}{\lg x+2}=1$;

4) $\dfrac{1}{2}\lg(5x-4)+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18$; 5) $\dfrac{\lg(10x-19)}{2\lg(2x-3)}=1$;

6) $\dfrac{\lg(x+5)}{2}+\lg\sqrt{x-3}=\dfrac{1}{2}\lg(2x+1)$;

7) $\dfrac{\log_2 x}{\log_2\frac{x}{2}}-2\log_2\sqrt{x}+\log_2 2x=3$; 8) $\log_2^2 x-9\log_8 x=4$;

9) $\log_2 x+\dfrac{4}{\log_x 2}=5$; 10) $\log_2^2(x+1)-\log_{\frac{1}{4}}(x+1)=5$;

11) $81^{2-\log_{\sqrt{3}} x}-1=0$; 12) $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$;

13) $x^{\log_a x}=a^2x\ (a>0,\ a\neq 1)$; 14) $x^{2(\lg x)^3-\frac{3}{2}\lg x}=\sqrt{10}$;

15) $\lg(5-x)-\dfrac{1}{3}\lg(35-x^3)=0$; 16) $\dfrac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3$;

17) $\lg^3 x-\lg^2 x-6\lg x=0$; 18) $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4$;

19) $\log_{1-x}3-\log_{1-x}2-0{,}5=0$;

20) $\log_2\dfrac{x-5}{x+5}+\log_2(x^2-25)=0$;

21) $\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0{,}5}(x+1)$;

22) $\log_{1+x}(2x^3+2x^2-3x+1)=3$.

Решить систему уравнений:

А

231. 1) $\begin{cases}x-y=90,\\ \lg x+\lg y=3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=7,\\ \lg x+\lg y=1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3^x+3^y=12,\\ \log_3 27=x+y;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\log_9 729=x+y,\\ 3^{x-y-1}=1.\end{cases}$

Б

232. 1) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=2,\\ \log_{48}x+\log_{48}y=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9,\\ x+y-20=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = 2, \\ \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 = 8. \end{cases}$

Б

233. 1) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} (x + y) = 2, \\ \log_5 (x - y) = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 10^{1 + \lg(x + y)} = 50, \\ \lg(x - y) + \lg(x + y) = 2 - \lg 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2{,}5, \\ xy = 27; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \log_2 x = \log_4 y + \log_4 (4 - x), \\ \log_3 (x + y) = \log_3 x - \log_3 y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \log_x (3x + 2y) = 2, \\ \log_y (2x + 3y) = 2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \lg (x^2 + y^2) = 1 + \lg 13, \\ \lg (x + y) - \lg (x - y) = 3 \lg 2; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \lg (x^2 + y^2) = 1 + \lg 8, \\ \lg (x + y) - \lg (x - y) = \lg 3; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \log_x y = 2, \\ \log_{x + 1} (y + 23) = 3. \end{cases}$

Решить неравенство:

А

234. 1) $\log_3 x < 4$; 2) $\log_5 x > 2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x < 3$;
4) $\log_{0,3} x > 3$; 5) $\lg x < \lg 3$; 6) $\lg x > \frac{1}{3}$;
7) $\lg x > \lg 5$; 8) $\lg x > -3$; 9) $\log_2 (x^2 - x - 4) < 3$;
10) $\log_3 (12 - 2x - x^2) > 2$; 11) $\lg x + \lg (x - 3) < 1$;
12) $\lg (2x + 3) < \lg (x - 1)$.

Б

235. 1) $\log_x 0{,}2 > \log_x 3$; 2) $2 \lg x > \lg (4x + 21)$;
3) $\log_2 8^{2n - 1} > 3n + 6$; 4) $\log_{0,5} 16^{2x - 3} > x - 24$;
5) $\log_8 (5x - 8) < \log_8 (2x + 7)$; 6) $\log_{0,3} (x^2 + 1) < \log_{0,3} 2x$;
7) $\log_{3x + 2} x < 1$; 8) $\log_{x - 1} (5x + 3) > 1$;

9) $\log_2^2 x - \log_2 x \leq 6$;   10) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$;

11) $2\log_2(x+1) - \log_2(2x-4) > 0$;

12) $\log_4 \log_2 \log_3 x \leq 0{,}5$.

236. 1) $\log_3 x < 3 - \log_3(12 - x)$; 2) $\log_2 0{,}25^{3-x} > 2 - x^2$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}}(4 - x) - 1$;   4) $\log_2(x^2 - 9x + 8) < 3$;

5) $\log_2 x > \log_4(x - 1)$;   6) $\log_{x^2+4}(2x^2 - 5) < 1$;

7) $\lg(x^2 - x + 8) \geq 1$;   8) $\log_\pi(x + 1) + \log_\pi x < \log_\pi 2$;

9) $\log_{0,5} \dfrac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \leq -1$; 10) $\log_3 \log_{0,5} \log_{\frac{1}{3}} x > 1$;

11) $\log_x(x + 2) > 2$;   12) $\log_{x+1}(x + 3) > 1$;

13) $\log_{x-3}(x^2 - 4x + 3) < 0$;   14) $\log_x(x^2 - 2x - 3) > 0$;

15) $\dfrac{\lg^2 x + \lg x - 3}{2\lg x - 1} > 1$;   16) $\dfrac{\log_2(x+1)(x-3)}{\log_2(x-3)} < 0$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ИТОГОВОГО ПОВТОРЕНИЯ

237. Найти область определения функции:

1) $y = \log_2(x^2 - 4)$; 2) $y = \arcsin\frac{2x}{1+x}$; 3) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$;

4) $y = \arccos(2\sin x)$; 5) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

6) $y = \log_2\log_3\log_4 x$.

238. Исследовать функцию на четность и нечетность:

1) $f(x) = x^2 - 4x + 1$; 2) $f(x) = \lg\frac{2+x}{2-x}$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$; 4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

239. Построить график функции:

1) $y = \frac{3x-2}{2x+1}$; 2) $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$;

3) $y = \arccos(-2x)$; 4) $y = \sqrt{2-x}$.

240. Доказать тождество:

1) $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)}{\cos\alpha}$;

2) $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha = 4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; 4) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

241. Решить уравнение:

1) $\frac{\cos x}{1-\sin x} = 1 + \sin x$; 2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$;

3) $5\sin 2x - 5\cos 2x = \operatorname{tg} x + 5$; 4) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$;

5) $\sin 8x = \sin 2x$; 6) $2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3}$;

7) $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 1$; 8) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 5x$;

9) $1 - \cos 7x = 2\cos^2 9x$; 10) $\operatorname{tg} x - \sin x = 1 - \operatorname{tg} x\sin x$;

11) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^3 x + \cos^3 x$; 12) $\sin 3x + \cos 2x + 2 = 0$.

242. Решить неравенство:

1) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \ge 1$; 2) $\cos^2\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) > \frac{3}{4}$;

3) $2\sin x\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 > 0$.

243. Решить уравнение:

1) $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$; 2) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-10} = 1$;

3) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$;

4) $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt{\frac{x+3}{5-x}} = 2$; 5) $\sqrt{x^2-2} - \sqrt{6x-11} + \sqrt{x+3} = 0$;

6) $\sqrt[4]{(x-1)^2} - \sqrt[4]{(x+1)^2} = \frac{3}{2}\sqrt[4]{x^2-1}$.

244. Решить неравенство:

1) $\frac{\sqrt{x+4}}{1-x} < 1$; 2) $\sqrt{2x+1} < \frac{2(x+1)}{2-x}$; 3) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{x+4}$;

4) $\sqrt{2x-1} > 2x+15-\frac{10}{\sqrt{2x-1}}$; 5) $\sqrt[4]{15+x} - \sqrt[4]{2-x} > 1$;

6) $\sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} > \sqrt{4x^2-18x+18}$.

245. Решить уравнение:

1) $\frac{(0{,}5)^{x-3}}{(0{,}125)^{2-x}} = 128^x \cdot \sqrt[3]{(0{,}25)^{x-1}}$;

2) $4^{x+1} - 5^{x-1{,}5} = 5^{x+0{,}5} - 2^{2x-4}$;

3) $\frac{15}{2^x+1} + \frac{4}{2^{x-1}-3} = \frac{12}{2^{x+1}}$;

4) $2^{2x+1} - 5\cdot 6^x - 3^{2x+1} = 0$;

5) $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 6$;

6) $(x-2)^{x^2+2x} = (x-2)^{11x-20}$.

246. Решить неравенство:

1) $(x-2)^{x^2-6x+1} > 1$; 2) $25^x < 65^x - 5$;

3) $2^{x+2} + 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x-2}$;

4) $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) > 1$; 5) $12^x + 5^x > 13^x$;

6) $3^{\sqrt{1-x}} + 3^{\sqrt{2-x}} + 3^{\sqrt{6-2x}} > 13$.

247. Решить уравнение:

1) $\lg(2x+6)-\lg\sqrt{x+2}=1-\lg 2$;

2) $\log_8 \log_2 \log_2 \log_2\left(-\frac{1}{x}\right)=0$;

3) $\frac{1+\lg(x-1)}{1-\lg^2(x-1)}+\frac{1}{1-\lg(x-1)}=1$;

4) $\sqrt{\log_x 5\sqrt{5}+\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}}\cdot \lg_{\sqrt{5}} x=-\sqrt{6}$;

5) $\log_{\sqrt{2}} \log_2 \log_4(x-15)=0$; 6) $x^{3-\lg\frac{200}{x}}=400$.

248. Решить неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x+\sqrt{1-4\log^2_{\frac{1}{2}} x}<1$;

2) $\log_3 \frac{x+4}{x-2}-\log_3 \frac{4x+11}{5x+1}<1$;

3) $2\log_3 \log_3 x+\log_{\frac{1}{3}} \log_3(9\sqrt[3]{x})\geq 1$;

4) $\log_x 2\log_{2x} \log_2 4x>1$;

5) $\log_3(3^x-1)\log_{\frac{1}{3}}(3^{x+2}-9)>-3$;

6) $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right)>1$.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. 1) $(-\infty;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$; 2) $[2;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -2)$, $\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$; 4) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$, $[5;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ 2)$, $(2;\ 3)$, $(3;\ +\infty)$; 6) $(-\infty;\ -2]$, $[1;\ +\infty)$; 7) $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$; 8) $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 5)$, $(5;\ +\infty)$; 9) $[0;\ 3]$; 10) $\boldsymbol{R}$; 11) $[-4;\ 4]$; 12) $[-4;\ 4]$; 13) $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$; 14) $(-5;\ 5)$; 15) $(3;\ +\infty)$; 16) $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$; 17) $(-\infty;\ -4)$, $(-4;\ 4)$, $(4;\ +\infty)$; 18) $[2;\ 3)$, $(3;\ 4]$; 19) $(-9;\ 5)$, $(5;\ 9)$; 20) $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$. **2.** 1) Нечетная; 2) четная; 3) нечетная; 4) нечетная; 5) четная; 6) четная; 7) четная; 8) не принадлежит ни к четным, ни к нечетным функциям; 9) не принадлежит ни к четным, ни к нечетным функциям; 10) не принадлежит ни к четным, ни к нечетным функциям; 11) не принадлежит ни к четным, ни к нечетным функциям; 12) четная; 13) четная; 14) нечетная; 15) не принадлежит ни к четным, ни к нечетным функциям; 16) нечетная; 17) не принадлежит ни к четным,ни к нечетным функциям; 18) четная. **4.** 1) $\beta = 180° + 360° \cdot (-1)$; 2) $\beta = 300° + 360° \cdot (-3)$; 3) $\beta = 140° + 360° \cdot 4$; 4) $\beta = 42° + 360° \cdot 20$; 5) $\beta = 110° + 360° \cdot (-5)$. **7.** $16\frac{4}{11}$ мин. **8.** 0,262; 0,389; 0,893; 2,75; 2,83. **9.** 72°; 360°; 86°; 143°. **12.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0,85; 3) а) 31,25 см; б) 62, 83 см; 4) а) 1; б) 2. **22.** 1) $-3\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}671$; 3) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}870$; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1{,}891$. **23.** 1) 2; -2; 2) 5; -5; 3) 5; 1; 4) -1; -5; 5) 6; -4; 6) 5; 2; 7) 3; 2; 8) 1; $\frac{1}{3}$; 9) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$. **25.** 1) $\sin 65°$; 2) $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}$; 3) $\cos 50°$; 4) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; 5) $\sin\frac{\pi}{3}$; 6) $\cos(-45°)$; 7) $\mathrm{ctg}\,(-0{,}3\pi)$; 8) $\mathrm{tg}\,60°$. **29.** 1) $\frac{1}{4}\sin^2 6\alpha$; 2) 1. **31.** 1) $x \ne n\pi$; $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x \ne \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x \ne 0$; 4) $x \ne n\frac{\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **32.** 1) $[-1;\ 1]$; 2) $(-\infty;\ +\infty)$; 3) $[3;\ +\infty)$; 4) $[0;\ 2]$. **34.** 1) Во II или III четверти; 2) в I или III четверти; 3) в III или IV четверти; 4) во II или IV четверти. **36.** 1) $y > 0$ при $n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$; $y < 0$, если $\frac{\pi}{2} +$

$+ n\pi < x < \pi + n\pi$; $y = 0$, если $x = n\frac{\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $y > 0$, если $2n\pi < x < \pi + 2n\pi$; $y < 0$, если $\pi + 2n\pi < x < 2\pi + 2n\pi$; нулей нет; 3) $y > 0$, если $-\frac{3\pi}{2} + 6n\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 6n\pi$; $y < 0$, если $\frac{3\pi}{2} + 6n\pi < x < \frac{9\pi}{2} + 6n\pi$; $y = 0$, если $x = \frac{3\pi}{2} + 3n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $y > 0$, если $x \neq n\pi$; $y = 0$, если $x = n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $y > 0$, если $2n\pi < x < \pi + 2n\pi$; $y < 0$, если $\pi + 2n\pi < x < 2\pi + 2n\pi$; $y = 0$, если $x = 2n\pi$; 6) $y > 0$, если $n\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$; $y < 0$, если $\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2}$; $y = 0$, если $x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

37. 1) $\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 3) $2\sin\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; 5) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 6) $1 + \sin^2\alpha$; 7) $\cos^2\alpha$; 8) 1; 9) $1 - \cos\alpha$; 10) 0; 11) -1; 12) 1; 13) $\frac{3}{2}$; 14) $2\operatorname{tg}^2\alpha$; 15) 1; 16) $\frac{4}{|\sin\alpha|}$. **38.** 1) $m^2 - 2$; 2) $m(m^2 - 3)$. **39.** 1) $\frac{4}{25}$; 2) $2\frac{1}{12}$. **41.** 1) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$; $\operatorname{tg}\alpha = -3\frac{3}{7}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{7}{24}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{24}{25}$, $\cos x = -\frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} x = \frac{24}{7}$; 4) $\cos x = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg} x = -2\frac{2}{5}$; $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{12}$. **43.** $\sin\alpha \approx 0{,}88$; $\operatorname{tg}\alpha \approx 1{,}835$; $\operatorname{ctg}\alpha \approx 0{,}55$. **44.** 1) 7,658; 2) 22,105; 3) 74,115; 4) 47,210. **45.** 1) 60°, 2) 27°, 3) 38°, 4) 32°. **46.** 6,21. **47.** $v \approx 2{,}5 \cdot 10^7$ м/с. **48.** 1) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $2 - \sqrt{3}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 3; 5) $-0{,}4 - 0{,}3\sqrt{3}$ или $-0{,}4 + 0{,}3\sqrt{3}$; 6) 1; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) -4; 9) $\frac{1}{4}$; 10) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$. **49.** 1) $\cos\beta$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$; 3) $2\sin 26°$; 4) $\operatorname{tg}4\alpha$; 5) $\cos 2\alpha$; 6) $\sqrt{2}\,|\cos 4\alpha|$; 7) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$; 8) $4\cos x\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$; 9) $\sin 2\alpha$; 10) 1; 11) $|\sin 2\alpha|$; 12) $\cos 2\alpha$; 13) 2; 14) $\cos^2\alpha$; 15) $\operatorname{ctg}4\alpha$; 16) 1; 17) $2\sqrt{2} \times \sin\frac{\alpha}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$; 18) $2\cos\alpha$; 19) $2|\operatorname{ctg}\alpha|$; 20) $2\sin 2\alpha$; 21) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 22) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **50.** 1) $2\sin\alpha\cos\beta$; 2) $2\sin^2\frac{3\alpha}{4}$; 3) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos\alpha}$; 5) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; 6) $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha$;

7) $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha-\beta}{2}$; 8) $4 \cos 0,5x \cos x \cos 2,5x$; 9) $-4 \sin 25^\circ \sin 5^\circ$; 10) $\sqrt{2}\left|\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|$; 11) $2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta$; 12) $\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$; 13) $\operatorname{tg}^4\alpha$; 14) $\frac{8\cos 4\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{\sin^2 4\alpha}$; 15) $4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$; 16) $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)$. **52.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{\pi}{6}$; 6) $-\frac{\pi}{4}$; 7) $\frac{\pi}{6}$; 8) $\frac{3\pi}{5}$; 9) $\frac{3\pi}{7}$. **53.** 1) $a \geq 0$; 2) $b < 0$. **55.** 1) R; 2) $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$. **57.** 1) $x = n\pi$; 2) $\pm(\pi - \arccos 0,4827) + 2n\pi$, $n \in Z$; 3) $x = n\pi$, $n \in Z$; 4) $x = -\operatorname{arctg} 0,5 + n\pi$, $n \in Z$; 5) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$; 6) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$; 7) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$; 8) $x = -\frac{2\pi}{3} + 4n\pi$, $n \in Z$; 9) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in Z$; 10) $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}n\pi$, $n \in Z$; 11) $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in Z$; 12) $x = \frac{\pi}{6} - 1 + n\pi$, $n \in Z$; 13) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in Z$; 14) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$; 15) $x = -\operatorname{arctg} 0,6009 + n\pi$, $n \in Z$; 16) $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$; 17) $x = (-1)^k \arcsin 0,2753 + \pi k$, $k \in Z$; 18) решений нет. **58.** 1) $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$; 2) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$, $n \in Z$; 3) $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in Z$; 4) $x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$; 5) $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x_2 = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2} + k\pi$, n, $k \in Z$; 6) $x_1 = \frac{k\pi}{2}$, $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $k, n \in Z$; 7) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in Z$; 8) $x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in Z$; 9) $x = 2n\pi$, $n \in Z$; 10) $x = n\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $k \in Z$; 11) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k, n \in Z$; 12) $x = \operatorname{arctg}\frac{7}{8} + n\pi$, $n \in Z$; 13) $x_1 = 180^\circ k - 45^\circ$, $x_2 = 180^\circ n + 56^\circ 19'$, $k, n \in Z$; 14) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 4k\pi$, $k, n \in Z$; 15) $x = \pm\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$; 16) $x = \frac{\pi}{8} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$; 17) $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$; 18) $\dot{x} = 2n\pi$, $n \in Z$; 19) $x_1 = \pi + 2n\pi$, $x_2 = \pm\frac{4\pi}{3} + 4k\pi$, n, $k \in Z$; 20) решений нет; 21) $x_1 = \pi + 2n\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, k, $n \in Z$; 22) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$,

$x_2 = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{9} + 2k\pi, k, n \in \mathbf{Z}$; 23) $x = -\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 24) $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi, x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi, n, k \in \mathbf{Z}$; 25) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$; 26) $x = 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 27) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi, k, n, m \in \mathbf{Z}$; 28) $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{2}{9} + k\pi, x_2 = \operatorname{arctg}\frac{7}{9} + n\pi, k, n, \in \mathbf{Z}$; 29) $x = -2\operatorname{arctg} 5 + 2k\pi$; 30) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, x_2 = -2\operatorname{arctg} 2 + 2k\pi, n, k \in \mathbf{Z}$; 31) $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}, x_2 = \pm\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4} + 2m\pi$, $x_3 = \pm\arccos\frac{-1-\sqrt{5}}{4} + 2k\pi, k, n, m \in \mathbf{Z}$; 32) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + n\pi, x_2 = k\pi, n, k \in \mathbf{Z}$; 33) $x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{16}(2n+1), n, k \in \mathbf{Z}$; 34) $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, x_2 = \pi + 2k\pi, n, k \in \mathbf{Z}$; 35) $x = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$; 36) $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x_2 = \operatorname{arctg} 3 + k\pi, n, k \in \mathbf{Z}$; 37) $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 38) решений нет; 39) $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 40) $x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi, k, n \in \mathbf{Z}$; 41) $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 42) $x = ((-1)^n - 1)\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 43) $x = (1 + (-1)^k)\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$; 44) $x = \frac{\pi}{8}(4k+1)$. **59.** 1) $\frac{n\pi}{4}, n \in \mathbf{Z}$; 2) решений нет; 3) $x_1 = 2n\pi, x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{3} + 2k\pi, n, k \in \mathbf{Z}$; 4) $x = \frac{2}{3}n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 5) $x_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi, x_2 = \operatorname{arctg} 5 + k\pi, n, k \in \mathbf{Z}$; 6) $x = \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 2) + n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 7) $x_1 = \frac{\pi k}{3}, x_2 = \frac{\pi}{7}(2k+1), k \in \mathbf{Z}$; 8) $x = \frac{\pi}{9}(3k \pm 1), k \in \mathbf{Z}$; 9) $x_1 = \frac{\pi}{10}(2k+1), x_2 = \frac{\pi}{6}(2n+1), k, n \in \mathbf{Z}$; 10) $x = 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 11) $x_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi, x_2 = \operatorname{arctg} 2 + k\pi, n, k \in \mathbf{Z}$; 12) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 13) $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 15) $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$; 16) $x = 2m\pi, m \in \mathbf{Z}$; 17) $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$; 18) $x = \frac{k\pi}{10}, k \in \mathbf{Z}$; 19) $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$; 20) решений нет; 21) $x_1 = \frac{n\pi}{2}$, $x_2 = \frac{k\pi}{5}, x_3 = \frac{\pi}{2} + m\pi, n, k, m \in \mathbf{Z}$; 22) $x = \frac{m\pi}{2}$, где $m = 3l$, $m = 3l + 1, l \in \mathbf{Z}$; 23) $x_1 = \pm\sqrt{\frac{2k+1}{2}\pi}, x_2 = \pm\sqrt{\frac{k\pi}{5}}$; 24) $z_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $z_2 = \frac{\pi}{2}(2n+1), k, n \in \mathbf{Z}$; 25) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; 26) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = (2m+1)\pi, x_3 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, k, m, n \in \mathbf{Z}$; **60.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, y = \frac{\pi}{6} - k\pi; k \in \mathbf{Z}$; 2) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2l\pi, y_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi$, $y_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k, l \in \mathbf{Z}$; 3) $x = \frac{7\pi}{6} + n\pi, y = -\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 4) $x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $y_1 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$; $x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi$,

$y_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $k, n \in Z$; 5) $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{2-3\sqrt{3}}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{6} + \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{2-3\sqrt{3}}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$; 6) $x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 4k\pi$, $y_1 = 2\pi + 4n\pi$, k, $n \in Z$, $x_2 = 2\pi + 4p\pi$, $y_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 4q\pi$, $p, q \in Z$. **61.** 1) $-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$; 3) решений нет; 4) $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \operatorname{arctg} 2 + n\pi$, $n \in Z$; 5) $\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$, $n \in Z$; 6) $\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $n, k \in Z$; 7) $-\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $n \in Z$; 8) $\frac{\pi}{3} + n\pi < x < \frac{5\pi}{3} + n\pi$, $n \in Z$; 9) $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$; 10) $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$; 11) $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \operatorname{arctg} 2 + k\pi$, $k \in Z$; 12) $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$; **63.** 1) 4; 2) 0,4; 3) 0,04; 4) 0,004; 5) $\frac{5}{6}$; 6) $\frac{2}{3}$; 7) $1\frac{1}{4}$; 8) 1,8; 9) 1,25; 10) 0,11; 11) 1,5; 12) 1,4. **64.** 1) 6,3; 2) 1,91; 3) $6\frac{3}{5}$; 4) $\frac{4}{5}$. **65.** 1) ±0,5; 2) ±1,5; 3) ±0,7; 4) $\pm1\frac{1}{3}$. **66.** 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) да; 5) нет. **67.** 1) $a \ge 0$; 2) $a \le 0$; 3) любые действительные числа; 4) $x \le 0$; $x \ge 5$; 6) $x > 4$. **68.** 1) 10; 2) 3; 3) 2; 4) 1; 5) –1; 6) 0; 7) 0,1; 8) –1,5. **70.** 1) 28; 2) 0,2; 3) 16,7; 4) –20. **71.** 1) $-\sqrt[3]{7}$; 2) $-\sqrt[3]{8}$; 3) $-\sqrt[5]{2a}$. **72.** 2) $|a-6|$; 3) 1, если $a > 0$; –1, если $a < 0$ и n — четное; 1, если $a < 0$ и n — нечетное. **73.** 1) 10; 2) 2; 3) x^3; 4) 3; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 1,5. **74.** 1) 10; 2) 0,3; 3) 1,5; 4) 3. **75.** 1) $\sqrt[10]{a^9}$; 2) $\sqrt[11]{25}$; 3) $\sqrt[20]{2}$; **76.** 1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[9]{36}$; 3) $\sqrt[3]{25}$; 4) $\sqrt[5]{a^2b^3c^4}$. **77.** 1) $\sqrt[12]{3^6}$; $\sqrt[12]{3^4}$; $\sqrt[12]{3^3}$; 2) $\sqrt[6]{16a^4}$; $\sqrt[6]{8a^3}$. **78.** 1) 14; 2) $\frac{1}{10}$; 3) 2; 4) 2; 5) 3. **79.** $x^4 + y^4$. **80.** 1) 0; 2) $2\sqrt{15}$. **81.** 1) $\sqrt[6]{6}$, $\sqrt[6]{8}$; $\sqrt[6]{9}$. **82.** 1) a^{m-n}; 2) c^{a-b}; 3) $a - 4\sqrt[3]{a}$. **83.** 1) $\sqrt[6]{\frac{3}{8}}$; 2) 1; 3) $2b$; 4) $|5-a| = a-5$; 5) $1-x$, если $x = \frac{1}{2}$, $x-1$, если $x = 4$. **85.** 1) Плюс; 2) плюс. **86.** $\sqrt[6]{(2+\sqrt{3})^5}$. **87.** 1) $m^2\sqrt[3]{m^2n^2}$; 2) $2b^2\sqrt{a^3b^3}$; 3) $\frac{2b}{3c}\sqrt[5]{\frac{a^2b}{c^2}}$;

4) $2(m+n)\sqrt[3]{3(m-n)}$; 5) $a^2\sqrt[n]{a^3}$; 6) $a^{2(n-1)}$; 7) $a^x b^3\sqrt[n]{a^2z^3}$.
88. $x^2\sqrt[4]{2cx^3}$, если $x<0$ и $c<0$, то $x^3<0$ и $x^2>0$; тогда подкоренное выражение остается положительным, а все выражение – отрицательное $-x^2\sqrt[4]{2cx^3}$; x и c не могуть иметь разные знаки, т. к. в этом случае под корнем четвертой степени было бы отрицательное число. **89.** $ab\sqrt[n]{a-b}$. **90.** $x<0$. **91.** 1) $\sqrt[3]{24}$; 2) $\sqrt[4]{9}$; 3) $\sqrt[5]{4}$; 4) $\sqrt[3]{2a^3}$; 5) $\sqrt[4]{5b^4}$; 6) $\sqrt{(a+b)^3}$. **92.** 1) $\sqrt[4]{a^3}$; 2) $\sqrt[6]{20}$; 3) $\sqrt[12]{x^4}=\sqrt[3]{x}$; 4) $\sqrt[20]{a^5}=$ $=\sqrt[4]{a}$. **93.** 1) $\frac{1}{c^2}\sqrt{abc^2}$; 2) $\frac{1}{a^2+b^2}\sqrt[3]{m(a^2+b^2)^2}$. **94.** 1) $\sqrt[4]{4a^{12}b}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{3a^2(a+b)^2}{a-b}}$. **95.** 1) $\sqrt[9]{b^4}$; 2) $-\sqrt{2a(a-2)}$. **96.** 1) $\sqrt[3]{5}>$ $>\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$; 2) $\sqrt[3]{7}<\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$. **97.** 1) $-\sqrt{\frac{2(x+y)}{y-x}}$; 2) $\sqrt[3]{4a^3(x-y)^4}$.
98. 1. **102.** 1) $\frac{x}{y}\sqrt{xy}$; 2) $\sqrt[5]{x^2y^2}$; 3) $\frac{2a}{bc}\sqrt[3]{5ab^2c}$.

103. 1) $\frac{1}{a+b}\sqrt[3]{a(a+b)}$; 2) $\begin{cases} a, a>2b \\ -a, a<2b \end{cases}$. **104.** 1) $y^2\sqrt[n]{x^2y^2}$; 2) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^2\left(1+x-\sqrt{ax}+a\right)^2$. **105.** $-\sqrt{x}$. **106.** 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) да. **109.** Нет. **110.** 9 при $x=5$; 1 при $x=\frac{1}{2}$. **112.** 1) Да; 2) нет. **113.** 1) $210\sqrt[5]{15a^4}$; 2) $0{,}8\sqrt[7]{\frac{14a^5}{b^3}}$; 3) $\frac{1}{4}ab\sqrt{2ab}$.
114. 1) $6\sqrt[12]{a^5}$; 2) $\sqrt[24]{a^{21}b^7}$; 3) $a-2\sqrt[6]{a^5}+\sqrt[3]{a^2}$.
115. 1) $\sqrt[60]{4000a^{26}}$; 2) $\sqrt[24]{m^5}$; 3) a^2-b, $a\geq\sqrt{b}$. **116.** 1) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{a}}{b}$; 3) $3a\sqrt[3]{a^2}$; 4) $\frac{\sqrt{mn}}{2n}$; 5) $\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{7}\right)$; 6) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.
117. 1) $2\sqrt{5}+\sqrt{7}$; 2) $\frac{5a\left(a\sqrt{7}+2\sqrt{a}\right)}{7a^2-4a}=\frac{5\left(a\sqrt{7}+2\sqrt{a}\right)}{7a-4}$;
3) $\frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)$; 4) $\frac{\left(7\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)^2}{49a+4b}$; 5) $7\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)$;

6) $(a^2 + ax + x^2)\left(\sqrt{a} + \sqrt{x}\right)$. **118.** 1) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30}}{12} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}$; 2) $-\frac{x^2+\sqrt{x^4-a^4}}{a^2}$. **119.** 1) $\frac{3}{2ab\sqrt[7]{a^3}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{6}-1}$;

3) $\frac{41}{\left(3\sqrt{5}+2\right)^2}$; 4) $\frac{5}{3\sqrt{7}+2\sqrt{2}}$; 5) $\frac{x}{\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x}}$;

6) $\frac{47}{55\sqrt{3}-28\sqrt{6}-54\sqrt{2}+96}$; 7) $\frac{1}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}$. **120.** 1) 4; 2) 28; 3) 16; 4) 16; 5) 1; 6) $a + b^2$. **121.** 1) 4; 2) 7. **122.** 1) 16 и 8; 2) −0,5.

123. 1) Решений нет; 2) −2. **124.** 6. **125.** 1) 2; 2) $\frac{2}{9}$. **126.** 1) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. 3) a и $-b$; 4) −1 и 3. **127.** 1) 2; 2) 6. **128.** 1) −1 и $-\frac{1}{6}$; 2) $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. **129.** 1) 0; 2) 62. **130.** 1) $-\frac{2}{3}$ и 3; 2) 0 и 1; 3) 0, 1, 8, 9; 4) $3a$ и $4a$. **134.** 1) $\frac{1}{4}$ и 1; 2) корней нет. **135.** 1) −1; 2) −2; 3) 0; 4) −6, −5, $-\frac{11}{2}$. **136.** 1) 1, $-\frac{1}{3}$; 2) ±21; 3) $5 \le x \le 10$; 4) 3. **137.** 1) 8; 2) 1, −6; 3) 32; 4) 64. **138.** 1) (9; 4), (4; 9); 2) (1; 4), (4; 1); 3) (8; 2), (2; 8). **139.** 1) (1; 9), (9; 1); 2) (5; 20), (20; 5); 3) (1; 64), (64; 1); 4) (−1; −64), (64; 1). **141.** 1) (4; 9), (9; 4); 2) (1; 4), (4; 1); 3) $(9a^2; a^2)$; 4) (4; 1). **142.** 1) (3; −2; 6); 2) (16; 1); 3) (16; 1), (1; 16); 4) $(\sqrt{10}; \sqrt{6})$, $(\sqrt{10}; -\sqrt{6})$. **143.** 1) $\left(\frac{25}{3}; \frac{16}{3}\right)$; 2) (2; 3); (−2; −3); (2; −3); (−2; 3); 3) (5; 3), (5; 4); 4) (5; 4; 5). **144.** 1) [1; 5); 2) $(-\infty; -2)$, $(14; +\infty)$; 3) [−2; 2); 4) [−2; 2) 5) [2; 3); 6) $(-\infty; -2]$, $[5; 5\frac{9}{13})$. **145.** 1) a^{16}; 2) x^{7n}; 3) b^3; 4) c^n; 5) a^2; 6) b^2. **146.** 1) $16x^{12}y^8z^4$; 2) $27a^6b^{12}c^{15}$; 3) $-\frac{27}{125}$; 4) $\frac{a^4}{16b^4}$. **147.** 1) a^8; 2) $-\frac{64x^3y^6}{125z^9}$; 3) $a^{4(n-1)}$; 4) $-\frac{2^{2n-1}}{3^{2n-1}}$. **148.** 1) 1; 2) $\frac{b^2}{a^2}$; 3) $\frac{4a}{3b^2x}$; 4) $\frac{1}{32}$. **149.** 1) a^{-m}; 2) 10^{-12}; 3) $\frac{16a^8}{b^{12}}$; 4) $2x^3$. **150.** 1) a^{12}; 2) $625a^4b^8c^{12}$; 3) $p^{m(2n-1)}$; 4) $4^5m^5n^5$; 5) 8; 6) $\frac{3a^4+1}{a^2}$. **151.** 1) $\frac{16}{81a^8b^{36}}$; 2) $15x^{2n}$; 3) $\frac{24a^8b^4}{x^7y^8}$;

4) $\frac{25b^4-a^2}{a^2b^4}$. **152.** 1) $4a^{6x}+a^{x+1}x+\frac{x^2}{16a^{2(2x-1)}}$. **153.** 1) c^3; 2) $\left(\frac{c+x}{a-b}\right)^m$. **155.** 1) $\left(\frac{a^2b^4}{2b^2+a}\right)^{-1}$. **156.** 1) x^4; 2) $a^{\frac{13}{12}}$; 3) $b^{-\frac{1}{4}}$; 4) a^{-4}; 5) c^2; 6) $\frac{16}{25}$. **157.** 1) $x^{-\frac{1}{15}}$; 2) $p^{-\frac{9}{7}}q^{\frac{37}{28}}$; 3) b^2. **158.** 1) $3^{\frac{27}{8}}$; 2) $27\cdot125^{-2}$. **159.** 1) $a^{-\frac{61}{60}}$; 2) $2a^{-\frac{17}{8}}b^{\frac{2}{3}}$. **160.** 1) 1; 2) $a^{\frac{19}{20}}x^{\frac{2}{15}}$. **161.** 1) 9; 2) 32; 3) 15; 4) $\frac{1}{a^2}$. **163.** 1) $\frac{2^{\frac{1}{2}}-1}{5}$; 2) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+3}$; 3) $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-1}$; 4) $\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$. **164.** 1) $ax^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x$; 2) $4-y^3$. **165.** 1) $b^{\frac{1}{4}}-c^{\frac{1}{4}}$; 2) $a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}$. **166.** 1) $\left(a-3^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+3^{\frac{1}{2}}\right)$; 2) $\left(b^{\frac{1}{3}}-5\right)\left(b^{\frac{1}{3}}+5\right)$; 3) $\left(x^{\frac{1}{3}}-2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)$; 4) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{4}}\right)$. **167.** 1) 1; 2) $x-y$. **169.** 1) $x-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$; 2) $x^{-2}-2x^{-1}y^{\frac{1}{2}}+y$.

170. 1) $a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 2) $\left(5-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(25+5b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$; 3) $6^{\frac{2}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}}-6^{\frac{1}{3}}\right)\left(3^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}\right)$; 4) $a^{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)$. **171.** 1) 5; 2) 41. **172.** 32. **173.** 1) 0; 2) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2$; 3) y^2; 4) $x+1$; 5) $\frac{1}{\sqrt[12]{a^2b}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}-1}$. **174.** 1) 6; 2) 4,5; 3) −4; 4) 4; 5) 2,5; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{1}{2}$; 8) 3 и 4; 9) −2 и 1; 10) −2; 11) 1,5; 12) 5; 13) 1; 14) 1; 15) 3; 16) 2; 17) 11; 18) −4; 19) 35; 20) 3; 21) 9; 22) 2; 23) 2; 24) 4; 25) 1; 26) 9; 27) решений нет; 28) 1; 29) −3; 30) $-\frac{1}{2}$; 31) 3; 32) 1 и 2; 33) −1 и 1; 34) −2 и 2; 35) −2 и 2; 36) $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$; 37) 2; 38) 0; 39) 3 и 9; 40) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}++n\pi,\ n\in Z$; 41) 3; 42) 0,5; 43) $\frac{3}{4}$; 44) 0; 45) 1; 46) −2; 47) 0 и $\frac{1}{2}$; 48) −4 и 10; 49) 10; 50) −2,5 и 3.

175. 1) $x > -1$; 2) $x > 0$; 3) $x < 2$; 4) $x < -2$; $x > 3$; 5) $x > 0$; 6) $x \geq 3$; 7) $x > -\frac{2}{3}$; 8) $x < -3$; $x > 1$; 9) $x \leq -4$; 10) $x < \frac{3}{2}$; 11) $x < -4$; $x > 2$; 12) $x \in R$; 13) $-\frac{10}{7} < x < 10$; 14) $x > \frac{6}{11}$; 15) $x < -0{,}25$; 16) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$; 17) $-1 < x < 7$; 18) $1 < x < 2$; 19) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; 20) $x > \frac{21}{11}$; 21) $(0; 1)$; 22) $(-\infty; -7{,}5)$ и $(-0{,}5; +\infty)$; 23) $(0; +\infty)$; 24) $(-\infty; 6)$; 25) $(1{,}5; +\infty)$; 27) $(-3; +\infty)$; 28) $(0; 2]$; 29) $(-\infty; -1]$; 30) $[0; 1]$; 31) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$; 32) $(0; +\infty)$; 33) $(0; +\infty)$; 34) $[0; 4]$; 35) $(-1; 0) \cup (0; 1)$. **177.** 1) $4 = \log_3 81$; 2) $-2 = \log_4 \frac{1}{16}$; 3) $\frac{1}{3} = \log_8 2$; 4) $\frac{1}{3} = \log_{27} 3$. **178.** 1) 3; 2) -1; 3) 0; 4) -1; 5) 9; 6) -7. **179.** 1) -2; 2) 3; 3) -4; 4) 6. **180.** 1) 25; 2) 216; 3) 16; 4) 1; 5) 8; 6) 0,001. **182.** 1) $\log_{\frac{2}{3}} 2{,}25 = -2$; 2) $\log_{0,1} 0{,}01 = 2$; 3) $\log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$; 4) $\log_{343} 7 = \frac{1}{3}$. **183.** 1) 1; 2) -3; 3) 4; 4) 0; 5) -5; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{1}{2}$; 8) $-2\frac{1}{2}$. **184.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 4; 4) $\frac{1}{2}$. **185.** 1) Да; 2) да. **186.** 1) 2; 2) 2. **187.** 2. **188.** 1) -2; 2) -2; 3) $2\frac{1}{2}$; 4) -2; 5) 1; 6) 0; 7) $\frac{1}{2}$; 8) $\frac{3}{5}$. **189.** 1) 81; 2) $\frac{1}{25}$; 3) 1,25; 4) 4; 5) $a + 1$; 6) 729. **190.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 32; 3) 1; 4) $\frac{1}{343}$; 5) $\frac{1}{216}$; 6) 8. **191.** 1) -1; 2) 0. **192.** 1) 8; 2) $1\frac{3}{7}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 2; 5) 0,8; 6) 3. **193.** 1) 10; 2) 7; 3) 5; 4) 3; 5) $\frac{1}{7}$; 6) 8. **194.** 1) 5; 2) 7,4; 3) 2; 4) 64; 5) 24; 6) 1,25. **195.** 1) 0,3; 2) 9; 3) 1,5; 4) 7. **197.** 1) 20; 2) $\frac{4}{5}$. **199.** 1) $\lg a + 3\lg b - 2\lg c$; 2) $\frac{1}{5}\lg a - \lg b - 2\lg c$; 3) $2\lg a + \frac{1}{3}\lg b$; 4) $3\lg a + \frac{1}{2}\lg b + \frac{1}{2}\lg c - 2\lg(a + b)$. **200.** 1) $2\lg a + \frac{1}{2}\lg b + \frac{1}{2}\lg c - \lg 3 - \frac{3}{5}\lg(a + + b)$; 2) $\lg 2 + \frac{3}{4}\lg a - \frac{1}{2}\lg b$; 3) $\sqrt[3]{1{,}2}\,\lg 0{,}6$; 4) $\frac{1}{2}\lg a + \frac{2}{5}\lg b$. **201.** 1) $\lg 3 + 1\frac{3}{5}\lg a + \frac{2}{5}\lg(a + b)$; 2) $\frac{1}{3}(\lg a - \lg b)$; 3) $\frac{3}{2}\lg a + \frac{1}{2}\lg b$; 4) $-1\frac{5}{6}\lg a$; 5) $\frac{5}{8}(\lg a - \lg b)$. **202.** 1) $\lg_{12} 20$; 2) 1. **203.** 2. **204.** 1) 2; 2) 2. **206.** 1) $\frac{7a^3}{5}$; 2) 12; 3) $\frac{\sqrt{a+b}}{a^2 b^3}$; 4) $\frac{2(a+b)}{3a}$.

207. 1) $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt[3]{(a+b)^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}}$; 2) $\frac{2ab^3}{3\sqrt[4]{b-a}}$. **208.** 1) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt[3]{a+b}}{a-b}$; 2) $\sqrt[24]{\frac{b^6(a-b)}{a^{16}}}$. **209.** 1) 3; 2) $1\frac{7}{9}$. **210.** 1) 2; 2) 4. **216.** 1) $x > 2$; 2) $x < 5$. **217.** Положительный. **219.** Число N в 100 раз больше, чем число M. **220.** 1) $(-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-2; 2)$; 4) $(-\infty; +\infty)$.
221. 1) $(-\infty; -2)$; $(2; +\infty)$; 2) $(-2; 3)$; 3) $(-1; 2)$; 4) $\left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{2}\right)$.
222. 1) $\left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right)$, $(5; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2{,}5)$, $(1; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$, $(3{,}5; +\infty)$; 5) R, кроме $x = 0$; 6) R, кроме $x = 0$.
228. 1) 4; 2) 3; 3) $-2{,}35$; 4) решений нет; 5) 0; 1; 6) 3; 7) 15; 8) 1 и 125; 9) 100 и 1000; 10) 9 и $\frac{1}{3}$; 11) 100 и 0,01; 12) 10 и 0,0001; 13) 10^{10}; 14) 10 и 0,001. **229.** 1) 6,5; 2) 4,5; 3) 1; 4) $\frac{9}{4}$; 5) 3; 6) 14 и 6; 7) 10; 0,1; 1000; 0,01; 8) 100 и 0,01; 9) 1 и -3; 10) 0; 1; 4; 11) 13; 12) корней нет; 13) 10; 100; 14) $\frac{1}{3}$; 15) 0,0001 и 10; 16) 80. **230.** 1) -3; 2) 95 и 5; 3) 100 и 10^8; 4) 8; 5) 3,5; 6) 4; 7) 4; 8) $\frac{1}{2}$ и 16; 9) 2; 10) 3; $\frac{\sqrt{2}-8}{8}$; 11) 3; 12) 100; 13) a^{-1} и a^2; 14) 10 и $\frac{1}{10}$; 15) 3; 2; 16) 2; 3; 17) 1; 10^3; 10^{-2}; 18) 1; 19) $-\frac{5}{4}$; 20) 6; 21) 1; 22) 3. **231.** 1) (100; 10); 2) (2; 5), (5; 2); 3) (1; 2), (2; 1); 4) (2; 1). **232.** 1) (6; 8), (8; 6); 2) (2; 18), (18; 2); 3) $\left(\frac{1}{12}; \frac{4}{3}\right)$.
233. 1) $\left(12\frac{5}{9}; -12\frac{4}{9}\right)$; 2) (4,5; 0,5); 3) (27; 4), $\left(\frac{1}{81}; -3\right)$; 4) (5; 5); 5) (3; 9); (9; 3); 6) $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$; 7) (4; 16); 8) (5; 5); 9) (6; 8), (8; 6); 10) (9; 7); 11) (8; 4); 12) (2; 4). **234.** 1) $0 < x < 81$; 2) $x > 25$; 3) $x > \frac{1}{8}$; 4) $0 < x < 0{,}027$; 5) (0; 3); 6) $(\sqrt[3]{10}; +\infty)$; 7) $(5; +\infty)$; 8) $(0{,}001; +\infty)$; 9) (−3; $\left(-3; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$; $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; 4\right)$; 10) $(-3; 1)$; 11) $3 < x < 5$; 12) решений нет. **235.** 1) (0; 1); 2) $(7; +\infty)$; 3) $n > 3$; 4) $x < 4$; 5) $1{,}6 < x < 5$; 6) $x > 0$, кроме $x = 1$; 7) $x > 0$; 8) $x > 2$; 9) $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$; 10) (0; 0,001), $(10; +\infty)$; 11) $(2; +\infty)$; 12) $3 < x \leq 81$. **236.** 1) (0; 3), (9; 12); 2) $(-\infty; -4)$, $(2; +\infty)$; 3) $3 < x < 4$; 4) (0; 1), (8; 9); 5) $(1; +\infty)$; 6) $-3 < x < -\sqrt{2{,}5}$,

$\sqrt{2,5} < x < 3$; 7) $(-\infty; -1]$; $[2; +\infty)$; 8) $(0; 1)$; 9) $2 \le x < \frac{11}{4}$; $4 \le x + \infty$; 10) $\sqrt[8]{\frac{1}{3}} < x < 1$; 11) $(1; 2)$; 12) $x > 0$; 13) $2 + \sqrt{2} < x < 4$; 14) $1 + \sqrt{5} < x < +\infty$; 15) $0,1 < x < \sqrt{10}$, $x > 100$; 16) $(3; 4)$.
237. 1) $|x| > 2$; 2) $-\frac{1}{3} \le x \le 1$; 3) $x > 0$, $x \ne n$, $n = 1, 2, \ldots$; 4) $|x - k\pi| \le \frac{\pi}{6}$, $k \in Z$; 5) $4k^2\pi^2 \le x < (2k+1)^2\pi^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
238. 1) Не принадлежит ни к четным, ни к нечетным функциям; 2) нечетная; 3) четная; 4) нечетная. **241.** 1) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$; $x = 2m\pi$, $m \in Z$; 2) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$; 3) $x = \operatorname{arctg} 2 + n\pi$, $x = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} - 1) + n\pi$, $x = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} + 1) + + n\pi$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{n\pi}{8}$, $n \in Z$; 5) $x = \frac{n\pi}{3}$, $x = \frac{(2n+1)\pi}{10}$, $n \in Z$; 6) $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \frac{(4n+1)\pi}{4}$, $n \in Z$; 7) $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$; $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3}$, $n \in Z$; 8) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}$, $k \in Z$; 9) $\frac{(2n+1)\pi}{11}$; $x = \frac{(2k+1)\pi}{25}$, $n \in Z$, $k \in Z$; 10) $\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$; 11) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = (-1)^n \arcsin(2 - \sqrt{2}) + n\pi$, $k \in Z$, $n \in Z$; 12) $x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, $m \in Z$; **242.** 1) $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in Z$; 2) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} < x < \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$, $k \in Z$; 3) $\frac{\pi}{8} + k\pi \le x \le \frac{3\pi}{8} + k\pi$; $k \in Z$; 4) $\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in Z$. **243.** 1) $x = 3$; 2) $x = 7$; 3) $x = -1$; 4) $x = 1$; 5) нет решений; 6) $-\frac{17}{15}$. **244.** 1) $x \in \left[-4; \frac{3-\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; 2) $x \in (0; 2) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{11-\sqrt{153}}{4}\right)$; 3) $x \in \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; 1\right)$; 4) $x \in (1; 2)$; 5) $x \in \left(\frac{17}{3}; +\infty\right)$. **245.** 1) $x = \frac{25}{31}$; 2) $x = 2,5$; 3) $x_1 = \log_2 18 - \log_2 17$; $x_2 = 1$; 4) $x = \pm 3$; 5) $x = 3$; $x = 4$; $x = 5$.
246. 1) $x \in (2; 3) \cup (4; +\infty)$; 2) $x \in (0; 1)$; 3) $x \in (0; +\infty)$; 4) $x \in (1; +\infty)$; 5) $x \in (-\infty; 2)$; 6) $x \in (-\infty; 1)$. **247.** 1) 2; $-\frac{7}{4}$; 2) $-\frac{1}{16}$; 3) нет решений; 4) 0,2; 5) 31; 6) 0,01. **248.** 1) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt[5]{8}}{2}\right) \cup (1; \sqrt{2}]$; 2) $(-\infty; -4) \cup (3,5; +\infty)$; 3) $x > 27$; 4) $\left(\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2^{\sqrt{2}})$; 5) $(\log_3 \frac{28}{27}; \log_3 4$; 6) $(-3; 1) \cup (3; 4)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

Шкіль Микола Іванович, Слєпкань Зінаїда Іванівна,
Дубинчук Олена Степанівна

Алгебра і початки аналізу

Підручник для 10 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
(Російською мовою)
Затверджено Міністерством освіти і науки України

Редактор *Н. В. Демиденко*
Макет, художнє оформлення
і художнє редагування *Ц. М. Ганушкевич*
Коректори: *І. М. Барвінок, О. А. Козлова*

Підписано до друку 17.02.2003. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Гарнітура Шкільна.
Друк офсетний. Папір офсетний. Умов. друк. арк. 17,0+0,25 форзац.
Умов. фарбо-відб. 34,75. Обл.-вид. арк. 16,5+0,46 форзац.
Наклад 10 000 прим. Зам. № 3-448.

Видавництво «Зодіак-ЕКО».
01004, Київ–4, вул. Басейна, 1/2.
Свідоцтво про реєстрацію серія ДК № 155 від 22.08.2000 р.

Комп'ютерний набір та верстка СМП «Аверс».
04214, Київ, пр. Оболонський, 36.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 586 від 05.09.2001 р.

Віддруковано з готових діапозитивів
у ВАТ «Харківська книжкова фабрика "Глобус"».
61012, Харків, вул. Енгельса, 11.